高等学校教学用書

高等数学教程

第五卷 第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書



高等数学教程

第五卷　第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著
宋　　正譯



高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔諾夫院士（В. И. Смирнов）著的"高等数学教程"（Курс высшей математики）第五卷 1947 年版譯出的。原書曾于 1948 年荣获斯大林二等奖金。

本書中譯本分二册出版。第一分册介紹各种积分概念，特別是斯提勒杰斯积分及勒貝格-斯提勒杰斯积分，并且处理了多变数的情形。第二分册則是希勒柏特空間及其它空間的理論的介紹。由于原書出版后，前四卷已經过修訂，因此本書引用前四卷的地方，可能与本社所出版各卷新版譯本不尽相符，請讀者注意。

本書讀者对象是高等学校数学、物理等專业的高年級学生，青年教师。

高等数学教程

第五卷　第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著

宋　正　譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

商务印书館上海厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·548　开本 850×1168 1/32　印張 9 5/16

字数 222,000　印数 1—15,000　定价(4) ¥1.10

1959年2月第1版　1959年2月上海第1次印刷

原 序

在数学物理学的現代理論系統中，实变数函数論与一般的运算子論都有重大的意义。本書基本上就是討論这些問題的。从实变数函数論中，我只选擇了对于上述各种学科有用的材料。运算子論的研究是建立于希勒柏特空間的抽象理論的基础上。本書中，实变数函数論的基本内容乃是勒貝格–斯提勒杰斯积分論及完全加法的集合函数論。在第一章中討論古典的斯提勒杰斯积分論，而以小体字討論更一般的斯提勒杰斯积分的概念，后者乃是建立于相应上下达尔布积分相等的条件上。在第二章中討論实变数函数的度量理論及勒貝格–斯提勒杰斯积分論的基础。我从欧几里得空間中的一般測度論出發，然后定义可測函数及勒貝格–斯提勒杰斯积分的概念。在第三章中討論完全加法的集合函数論，闡明相关于一定的分布函数的絕对連續性概念，并討論黑林格尔积分論。在同一章中，以絕对連續的完全加法集合函数的积分表示法为基础，介紹一变数以及多变数的函数的导数的概念。所介紹的偏导数的推广概念乃是与 C. Л. 索伯列夫最近关于中值函数理論相联系的。在第三章末尾，很簡短地討論一下关于在抽象空間中建立測度論及积分論的可能性，并論述积分的一般定义的基础——这定义是依照 A. H. 廓勒莫郭洛夫的。在第四章中討論希勒柏特空間的抽象理論，首先就有界自共軛运算子的情形研究。第五章論述与希勒柏特空間不同的空間理論的初步。

編写本書时除專門論文以外我曾使用了很多專書。我且举出几种最基本的来。在第一章中曾使用了 B. И. 格利汶科的“斯提

勒杰斯积分”及 И. П. 那湯松的“实变数函数論基础”两書。关于第二及第三章，曾使用了薩克斯的“积分論”及瓦雷·布三的“勒貝格积分，集合函数，拜尔类”等書。

在論希勒柏特空間論时曾引用了斯通“希勒柏特空間中的綫性变换及其在解析方面的应用”，及 А. И. 蒲列斯涅尔在“数学科学的进展”期刊第九卷中的論文，以及 Н. И. 阿希叶杰尔論雅可比矩陣的論文。

我对 С. М. 罗金斯基表示深深的谢意，因为他曾看过本書的全部手稿，并給予我很多宝貴的意見，这些意見在最后出版时都应用了。

一九四六年二月十二日

目　录

第一章　斯提勒杰斯积分

第二章　集合函数与勒貝格积分

第三章 集合函数。絕对連續性。积分概念的推广

第一章　斯提勒杰斯积分

1. 集合及其权　应用数学分析学于近代自然科学时，各种积分概念都起着很大的作用，在第一、二两章中，我們将研究較以前所論更一般形式的积分論。在討論第一种积分方程論时，已經使用过勒貝格积分。在本节中先介紹一些集合論的初步知識。这些知識是以前[IV;78]在勒貝格积分概念之前所述的补充。

設有两个由某种物体(元)形成的集合 A_1 及 A_2。所謂两集合有相同的权，是指在 A_1 的諸元与 A_2 的諸元之間有一一对应的关系，就是說，有一对应关系，对于每一屬于 A_1 的元，必有一屬于 A_2 的确定元与它相应，而反之，对于 A_2 的每一元，必有一个屬于 A_1 的元，而且只有一个这样的元与它相应。无穷集合（即包含无穷多个元的集合）叫做可計的或可数的，是指它与全部正整数所成的集合有相同的权，也就是說，这集合的諸元可以用正整数标志出来：$a_1, a_2, a_3, \cdots$。两个可数集合必有相同的权。现在叙述一下可数集合的某些性質。考察可数集合的一个子集合，設后者由 a_{p_1}，a_{p_2}，… 等构成，其中 $p_1, p_2, \cdots$ 是一个正整数的增序列。这新集合的元也可以用正整数标志出来。每个元的标号就是 p 的足标。如此，可数集合的无穷部分仍是可数集合。现在考察两个可数集合：由諸元 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 組成的 $A(a_1, a_2, a_3, \cdots)$，及由諸元 b_1，$b_2, b_3, \cdots$ 組成的 $B(b_1, b_2, b_3, \cdots)$；作二者之和，即把屬于上面两个集合的一切元合成一个集合 C。如此而得的新集合 C 通常叫做集合 A 及 B 的和。这新集合仍是可数的。事实上，只須把 C 中的諸元依下面次序排列：$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$，就可以看出其可数性。对

于有穷多个可数无穷集合之和，相似的推理也适用，就是說，有穷多个可数集合之和仍是可数集合。現在考察集合之数目也是无穷的情形。設有可数多个可数集合。这些集合的元可以用两个整数来标志：$a_p^{(q)}$。上标号表示这元所屬的集合标号，而下标号表示这元在包含它的集合中所具有的标号。不难把这一切元 $a_p^{(q)}$ 用正整数标志出来。取上下标号都是 1 的元做第一个元：$a_1^{(1)}$。此后取上下标号之和为 3 的諸元，并把它們依其上标号增加的順序排列下来：$a_2^{(1)}$，$a_1^{(2)}$，于是得到諸集合之和中的第二元与第三元。再取上下标号之和为 4 的諸元，并把它們依其上标号增加的順序排列下来：$a_3^{(1)}$，$a_2^{(2)}$，$a_1^{(3)}$。这就給出了諸集合的和中的第四元、第五元及第六元。繼續作下去，可以看出可数多个可数集合的和仍是可数集合。如果和中某些項不是可数集合，而是有穷集合，則上面命題仍然有效。

設有某无穷集合 A。由其中取某一元，并附以标号 1。所余剩的集合仍是无穷的。由它再取出一元，并附以标号 2。繼續下去，可知由任一无穷集合必可提出一个可数集合。經过如此提取后所余的集合可能是空的，就是說，它可能不含任一元，也可能是有穷的，也可能是无穷的。我們証明，如果所余集合是无穷的，那末它与原来集合有相同的权，就是說，下面的命題是正确的：如果由无穷集合 A 中提取出可数集合 P 来，而余下的是一无穷集合 B，那末集合 A 及 B 有相同的权。由无穷集合 B 重新取出某一可数集合 Q，并設 C 是所余集合。如此原来的集合 A 分解成三个集合 $A=P+Q+C$，而其中的集合 C 可能是空的，也可能是无穷的，而 P 及 Q 都是可数集合。在第二次提取之前，$A=P+B$。不难在 A 及 B 的諸元間建立一一对应关系。事实上，$A=P+Q+C$，$B=Q+C$。可数集合之和 $P+Q$ 仍是可数集合，所以在 $P+Q$ 及 Q 的諸元之間可以建立一一对应。集合 C 中的每一元与它自己对

应。如此可以在 A 及 B 的諸元間建立一一对应。由所証的命題直接可得：如果对于无穷集合增添一可数集合，則所得的新集合与原来的集合是有相同权的。在上述关于減去或增添可数集合的命題中，如果把可数集合换成有穷集合，則命題依然有效。証明与上面完全一样。

以前曾証明过，屬于某一区間 $[a,b]$ 的一切有理数的集合是可数集合，一切有理数的集合也是可数集合。其証明与証明"可数多个可数集合之和仍是可数"这一命題完全一样。分数的分子起着上标号的作用，分母起着下标号的作用，而首先只要考察正分数。現在举一个不可数集合之例。考察凡屬于区間 $[0,1]$ 的实数。除零以外，其中每个数可以表成无尽十进小数，其整数部分是零，而反之，凡如此的十进小数一定与上述区間中的一个实数相应。我們不使用有尽小数，因为这种有尽小数与那些以 9 为周期的无尽小数表示同样数，例如 $0.37=0.36999\cdots$。我們証明上述实数的集合是不可数的。用归謬法証明。設上述一切十进小数，包括代表区間左端的小数 $0.00\cdots$，是可数的并附好标号。依下述方式作一个新的十进小数，其整数部分是零。取某一与第一个十进小数的第一位数不同的数字做第一位数，取某一与第二个十进小数的第二位数不同的数字做第二位数，等等。作新的十进小数时我們不使用 0 做位数，于是所得的无尽十进小数与原有的一切十进小数相异。如此与它相应的实数沒有包含在上面那可数集合之中，这与所設区間 $[0,1]$ 中一切实数已附好标号这一事实相冲突。如此証明了：屬于区間 $[0,1]$ 的一切实数是不可数的。我們說这集合具有連續統的权。不难看出，屬于任意一个有穷区間 $[a,b]$ 的一切实数的集合与屬于区間 $[0,1]$ 的一切实数的集合具有同样的权。公式 $y=\frac{x-a}{b-a}$ 就建立了这两集合諸元間的一一对应关系。当 x 遍历区間 $[a,b]$ 时，变数 y 就遍历区間 $[0,1]$。如果引用公式

$y=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$,那末当变数 x 在区間[0, 1]内部变化时,变数 y 遍历一切实数的集合,就是説由一切实数所組成的集合也具有連續統的权。如果不把区間的端点算在集合之中,那末其权并不改变,因为对于无穷集合增添或减去一个有穷集合并不改变其权。

在下面,我們常用記号$[a, b]$表示閉集合,而不包含端点的开集合則用記号(a, b)表示。如果左端不算入,而右端算进去,我們用記号$(a, b]$表示,同样可規定記号$[a, b)$的意义。这里的数 a 及 b 也可以取无穷值: $a=-\infty$, $b=+\infty$,就是説所論的区間可以在左边或在右边是无穷的。例如閉区間$[-\infty, +\infty]$包含两个无穷远点。与这相应,函数 $f(x)$ 也可以在 $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$ 处定义,例如,可以引用記号 $f(-\infty)$。在 $x=-\infty$ 处的連續性与条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=f(-\infty)$ 同效。同样可以处理 $x\to+\infty$ 的情形。

此外,也可以应用通常的表示法 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=f(-\infty+0)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty-0)$。

还应注意,在閉区間$[-\infty, +\infty]$中有穷而且連續的函数 $f(x)$ 一定在这区間中一致連續。

2. 斯提勒杰斯积分及其基本性質 回忆一下黎曼积分的定义,这种积分在前几卷中是常用的。設$[a, b]$是一个有穷区間,而 $f(x)$ 是定义于这区間上的有界函数。把这区間分割成部分: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,在每一部分区間$[x_{k-1}, x_k]$上取某一点 ξ_k,并作出积的和:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})。\tag{1}$$

如果无限地把区間分細,并随意地取点 ξ_k 时,上写的和有确定的極限 A,那末这極限值称做 $f(x)$ 在区間$[a, b]$上的积分。設 δ 是諸差 x_k-x_{k-1} 中的最大者。无限地細分区間$[a, b]$成部分与 $\delta\to0$ 同义;而所謂在(1)中之和有确定極限 A 存在,与下面所説的個

义：对于任意预定的正数 ε，存在一正数 η，使当 $\delta\leqslant\eta$ 时，

$$\left|A-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|\leqslant\varepsilon。$$

我們可以用同样方式建立更一般的积分觀念。这是由荷兰数学家斯提勒杰斯在 1894 年研究連分数时首先介紹的，其后得到很寬广的發展，在純粹数学問題与精密自然科学問題中都有应用。假在有穷区間 $[a, b]$ 上給出两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 来，并假二者在这区間之上每一点处都取有穷值。今不用和（1），而代之以和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。\tag{2}$$

如果无限地細分区間，并随意地取点 ξ_k 时，上写的和趋向于确定的有穷極限，那末我們說函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上依 $g(x)$ 是可积分的，并写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\lim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。$$

在黎曼积分中 $g(x)$ 的任务由 x 担当。显然現在介紹的新积分有很多类似黎曼积分的性質，而这些性質的証明也与对于黎曼积分的証明完全相同。現在枚举这些性質，并假下列各式中的一切积分都存在：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b\sum_{k=1}^{p}a_kf_k(x)dg(x)=\sum_{k=1}^{p}a_k\int_a^b f_k(x)dg(x)\\
&\int_a^b f(x)d\sum_{k=1}^{p}a_kg_k(x)=\sum_{k=1}^{p}a_k\int_a^b f(x)dg_k(x)\\
&\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)
\end{aligned}\right\}\begin{gathered}(a_k\text{都是}\\ \text{常数})。\end{gathered}\tag{3}$$

此外还有一个極显然的公式：

$$\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a)。\tag{4}$$

在（3）的前两式中，由右面的积分的存在可推知左面积分存在。

現在詳細地推出分部积分式。設函数 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在，我們証明 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在。取和(2)，把含相同点的函数 $g(x)$ 值的項归并，得

$$\sigma=-\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)]+g(b)f(\xi_n)-g(a)f(\xi_1)。$$

加上差值

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

幷减去它，可写成

$$\sigma=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\Big\{\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)]+$$

$$+g(a)[f(\xi_1)-f(a)]+g(b)[f(b)-f(\xi_n)]\Big\}。\qquad(5)$$

在花括弧中者恰是 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分之黎曼-斯提勒杰斯和(2)。依所知条件，$g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在，这就是說当无限細分区間时，花括弧中之和趋向于这积分值。如此，依(5)，和 σ 有一極限值，也就是說，$f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在，幷且可以写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b g(x)df(x)\qquad(6)$$

或

$$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b,\qquad(7)$$

而在这式中，由两积分中之一个存在可推得第二个存在。

斯提勒杰斯积分有两种特殊情形，現在提一下。設区間 $[a,b]$ 分割成有穷多的部分：$a=c_0<c_1<\cdots<c_{p-1}<c_p=b$，幷且在每个部分区間 (c_{k-1},c_k) 中函数 $g(x)$ 的值是常数 g_k。如此在位于区間 $[a,b]$ 中每一点 c_k 处，函数 $g(x)$ 有一跃度 $s_k=g_{k+1}-g_k$。可能在区間两端也有跃度：在左端是 $s_0=g_1-g(a)$，而在右端是 $s_p=$

$=g(b)-g_p$。再設函数 $f(x)$ 在一切間断点 c_k 处并在区間端点处連續。設 c_q 点不是和(2)中分割区間的点，但 c_0 与 c_p 除外。在和(2)中，如一項里的 x_{k-1} 与 x_k 是在同一区間 (c_{q-1},c_q) 中，那末这項必等于零，因为在这情形下，$g(x_{k-1})=g(x_k)$。如果区間 $[x_{k-1},x_k]$ 包含間断点 c_q，則当无限地細分区間时，$f(\xi_k)$ 趋向于 $f(c_q)$，$g(x_k)-g(x_{k-1})$ 趋向于 s_q，而显然(2)中之和趋向于下列的有穷和：

$$\lim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{q=0}^{p}f(c_q)s_q。\tag{8}$$

如果点 c_q 是分割 $[a,b]$ 的点，那末要考虑以 c_q 为端点的两个区間，而其結果一样。現在考察第二种特殊情形。設 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中是連續的，而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中有导函数 $g'(x)$，并且后者是依黎曼可积分的，从而是有界的。对于差值 $g(x_k)-g(x_{k-1})$ 使用拉格朗日公式，可以把和(2)写成下面形式：

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1}),\tag{9}$$

而 ξ_k' 是位于 $[x_{k-1},x_k]$ 内部的数。我們可以令 $f(\xi_k)=f(\xi_k')+\varepsilon_k$，而旣然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中是一致連續的，当无限地細分区間时 $|\varepsilon_k|$ 中的最大者趋向于零，也就是說，对于任意預定的正数 ε，存在一个正数 η，使由 $\delta<\eta$ 可知 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$。于是可以把(9)中的和写成

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k')g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})。\tag{9$_1$}$$

两个依黎曼可积分的函数的积还是可积分的，而在上写的公式中右边第一項当无限地細分区間时趋向于积 $f(x)g'(x)$ 的黎曼积分。不难証明第二項趋向于零。事实上，依假設，函数 $g'(x)$ 是有界的，就是說，有一确定的正数 M，使 $|g'(x)|<M$。上面已經說过，如果預定一个正数 ε，必有一正数 η 存在，使由 $\delta<\eta$ 可知 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$。于

是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}e_k g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varepsilon M(x_k-x_{k-1})=\varepsilon M(b-a),$$

而由此，既然 ε 是任意的，式 (9_1) 中右边的第二項趋向于零。如此取極限可得

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)dx, \tag{10}$$

就是說，在前述的假定下，斯提勒杰斯积分蜕化成平常的黎曼积分。在前面的第一情形中，则蜕化成有穷和。不难証明，如果不設 $f(x)$ 連續而設它是依黎曼可积分的，那末公式 (10) 依然成立。在以后我們将討論上面所定义的斯提勒杰斯积分存在的問題，也将論及一些将来再定义的更一般的积分的存在問題。重要的乃是函数 $g(x)$ 将算做在 $[a, b]$ 内是不减的。为簡便起見，以后常把不减函数叫做增函数。对于这样的函数 $g(b)$ 是其最大值，$g(a)$ 是其最小值。下面一节乃是准备性的。它不但对于研究上面所定义的斯提勒杰斯积分的存在問題有基本的意义，就是对于研究以后将介紹的更一般型积分問題也是如此。

3. 达尔布和 在討論黎曼积分时曾介紹过所謂达尔布和。对于以后将介紹的一切一般积分概念，相类似的和也起着基本的作用。本节中将就上面所定义的斯提勒杰斯积分作出这种和，并研究其性質。凡在本节中介紹的概念与所証明的事实只要經过一些无关宏旨的改变就对于以后推广的积分概念仍然成立，将来常要參考本节的結果。

首先回忆一下实数集合的确界定义[見 I; 39]。設有一实数集合 E，并設它是从上有界的，就是說有一数 L 存在，使凡集合 E 中的数必小于 L。如此則存在一确定的数 M，这数有下列特性：凡集合 E 中的数必不大于 M，而对于任意正数 ε 必有一屬于集合

E 的数存在，这数大于 $M-\varepsilon$。这数 M 叫做集合 E 的上确界。同样如果集合从下有界，就是說凡集合中的数必大于同一个固定数，那末这集合有一下确界 m，这数 m 有下列特性：凡集合 E 中的数必不小于 m，而对于任意正数 ε，集合 E 中必有小于 $m+\varepsilon$ 的数。如果集合从上无界，我們說它的上确界是 $(+\infty)$，而如果这集合从下无界，我們說它的下确界是 $(-\infty)$。确界的表示我們使用下面的写法：

$$m=\inf E, \quad M=\sup E。$$

設 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是在区間 $[a, b]$ 上有界的函数，而这区間可能是有穷的，也可能是无穷的，并且 $g(x)$ 是不减函数，又設有一种分割区間 $[a, b]$ 成部分的方法：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

用 δ 表示这分割。在区間左边无穷时，$a=-\infty$，而在区間右边无穷时，$b=+\infty$。設 m_k 与 M_k 各是 $f(x)$ 在区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上諸值的下确界及上确界。作与区間 $[a, b]$ 的分割 δ 相应的达尔布-斯提勒杰斯和：

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]; \quad S_\delta=\sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]。 \tag{11}$$

对于有界函数 $f(x)$，必有一正数 L 存在，使 $|f(x)|\leqslant L$。注意 $g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$，对于任意分割 δ 可得：

$$|s_\delta|\leqslant \sum_{k=1}^{n} L[g(x_k)-g(x_{k-1})]=L[g(b)-g(a)],$$

$$|S_\delta|\leqslant L[g(b)-g(a)],$$

与和(11)并列，还可以作下面的黎曼-斯提勒杰斯和：

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})], \tag{12}$$

而 ξ_k 是区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的某一点。注意 $m_k\leqslant f(\xi_k)\leqslant M_k$，而

$g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$,則对任意的分割 δ 可得不等式

$$s_\delta \leqslant \sigma_\delta \leqslant S_\delta。\tag{13}$$

現在介紹一些新名詞。分割 δ' 称做分割 δ 的后繼，是指分割 δ 的一切分割点也是分割 δ' 的分割点。設 δ_1 与 δ_2 是两个任意分割。取一新分割，使其分割点是由 δ_1 及 δ_2 两分割的分割点合并而成者。这新的分割叫做分割 δ_1 及 δ_2 的积，并表示成 $\delta_1\delta_2$。显然分割 $\delta_1\delta_2$ 既是 δ_1 的后繼，也是 δ_2 的后繼。对于任意有穷多个分割，也可以定义积 $\delta_1\delta_2\cdots\delta_n$ 的概念。还要注意和 s_δ 与 S_δ 只与分割 δ 的选擇有关，而和 σ_δ 則还随点 ξ_k 的选擇而变化。現在証明几个很簡單的定理。

定理 1．如果分割 δ' 是分割 δ 的后繼，那末 $s_{\delta'}\geqslant s_\delta$, $S_{\delta'}\leqslant S_\delta$。

証明不等式 $s_{\delta'}\geqslant s_\delta$ 做例。由 δ 換成 δ' 时，分割 δ 中的每一部分区間又分成有穷多个部分：

$$x_{k-1}=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\cdots<x_{p_k-1}^{(k)}<x_{p_k}^{(k)}=x_k,$$

而和 s_δ 中的項 $m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]$ 換成下列的和：

$$\sum_{s=1}^{p_k} m_s^{(k)}[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})],$$

其中 $m_s^{(k)}$ 是函数 $f(x)$ 在区間 $[x_{s-1}^{(k)}, x_s^{(k)}]$ 上的下确界。显然 $m_s^{(k)}\geqslant m_k$，所以，注意差值 $g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})$ 不能是負数，可得

$$\sum_{s=1}^{p_k} m_s^{(k)}[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})]\geqslant \sum_{s=1}^{p_k} m_k[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})]=$$

$$=m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

而定理証明了[参照 I;112]。

定理 2．如果 δ_1 及 δ_2 是任意两分割，那末 $s_{\delta_1}\leqslant S_{\delta_2}$。

对于同一分割的不等式 $s_\delta\leqslant S_\delta$ 可以由下面两关系直接导出：$m_k\leqslant M_k$, $g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$。如此对于分割 $\delta_1\delta_2$, $s_{\delta_1\delta_2}\leqslant S_{\delta_1\delta_2}$。另一方面，依定理 1, $s_{\delta_1}\leqslant s_{\delta_1\delta_2}$, $S_{\delta_2}\geqslant S_{\delta_1\delta_2}$，由此可知 $s_{\delta_1}\leqslant S_{\delta_2}$。

用 i 表示和 s_δ 对于一切可能分割 δ 的上确界，而用 I 表示和 S_δ 对于一切可能分割 δ 的下确界：

$$i=\sup s_\delta;\quad I=\inf S_\delta。\tag{14}$$

由确界的定义，并依定理 2 直接可知：对于任意两分割 δ_1，δ_2，不等式 $s_{\delta_1}\leqslant i\leqslant I\leqslant S_{\delta_2}$ 成立，特别是

$$s_\delta\leqslant i\leqslant I\leqslant S_\delta。\tag{15}$$

现在举出上下确界 i 与 I 相等的必要且充分的条件。关于这点，下面差值起着基本的作用：

$$S_\delta-s_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。\tag{16}$$

定理 3 i 与 I 相等的必要且充分的条件乃是存在一序列分割 $\delta_n(n=1,2,\cdots)$，使 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$。

証明其充分性：如果有分割序列 δ_n 存在，使 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，那末把不等式(15)应用于这序列可知 $i=I$。

証明其必要性：設 $i=I=A$。由于确界的定义，存在分割序列 δ'_n，使 $s_{\delta'_n}\to A$，也存在分割序列 δ''_n，使 $S_{\delta''_n}\to A$。取分割序列 $\delta_n=\delta'_n\delta''_n$。依定理 1，$s_{\delta_n}\geqslant s_{\delta'_n}$，$S_{\delta_n}\leqslant S_{\delta''_n}$，所以 s_{δ_n} 与 $s_{\delta_n}\leqslant A$，而 S_{δ_n} 与 $S_{\delta_n}\geqslant A$。如此 $s_{\delta_n}\to A$，$S_{\delta_n}\to A$，所以 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，而定理証明了。必須注意，在序列 δ_n 中部分区間不必无限地細分。例如可能一切分割 δ_n 都是同一分割 δ。由(15)直接可得下面結論：

系 如果 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，那末 $i=I$，$s_{\delta_n}\to i$，$S_{\delta_n}\to i$。

上面所述的关于等式 $i=I$ 的必要且充分的条件可以借助和 σ_δ 而表示出来。

定理 4. 差值 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}$ 趋向于零的必要且充分的条件乃是无論如何选擇諸点 $\xi_k^{(n)}$，σ_{δ_n} 有确定的極限，而如果这条件满足，那末 σ_{δ_n} 的極限是 i（或 $I=i$）。

証明其必要性：如果 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，那末如上所說，$s_{\delta_n}\to i$，

$S_{\delta_n}\to i$，所以 $\sigma_{\delta_n}\to i$，因为 σ_{δ_n} 满足不等式 $s_{\delta_n}\leqslant\sigma_{\delta_n}\leqslant S_{\delta_n}$。再証明其充分性。設

$$\sigma_{\delta_n}=\sum_{k=1}^{p_n}f(\xi_k^{(n)})[g(x_k^{(n)})-g(x_{k-1}^{(n)})]\to A,$$

而 $x_k^{(n)}$ 是分割 δ_n 的分割点，$\xi_k^{(n)}$ 是区間 $[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$ 中的某点。用 $M_k^{(n)}$ 及 $m_k^{(n)}$ 各表示 $f(x)$ 在区間 $[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$ 上諸值的上下确界。設 ε 是任意預定的正数。依条件 $\sigma_{\delta_n}\to A$，必存在一数 N，使无論怎样选择 $\xi_k^{(n)}$，

$$\text{当 } n>N \text{ 时，}\quad |A-\sigma_{\delta_n}|\leqslant\varepsilon。\tag{17}$$

依确界的定义可以选擇点 $\xi_k^{(n)}$，使不等式 $0\leqslant f(\xi_k^{(n)})-m_k^{(n)}\leqslant\varepsilon$ 成立。如此，

$$0\leqslant\sigma_{\delta_n}-s_{\delta_n}=\sum_{k=1}^{p_n}[f(\xi_k^{(n)})-m_k^{(n)}][g(x_k^{(n)})-g(x_{k-1}^{(n)})]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{p_n}\varepsilon[g(x_k^{(n)})-g(x_{k-1}^{(n)})]=\varepsilon[g(b)-g(a)],\tag{18}$$

所以，如果把差值 $A-s_{\delta_n}$ 表示成 $A-s_{\delta_n}=(A-\sigma_{\delta_n})+(\sigma_{\delta_n}-s_{\delta_n})$，依(17)与(18)可得：$|A-s_{\delta_n}|\leqslant|A-\sigma_{\delta_n}|+|\sigma_{\delta_n}-s_{\delta_n}|\leqslant\varepsilon[1+g(b)-g(a)]$ 当 $n>N$ 时必成立。旣然 ε 是任意的，可知 $s_{\delta_n}\to A$。同样可証 $S_{\delta_n}\to A$，所以 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，而定理証明了。显然極限 A 等于数 i 与 I，而后二者在現情形下是相等的。由本定理与上一定理可以直接推出下面的系：

系　等式 $i=I$ 成立的必要且充分的条件乃是存在分割序列 δ_n，使无論怎样选擇諸点 $\xi_k^{(n)}$ 时，σ_{δ_n} 恒有固定的極限。如果这条件滿足，那末这極限等于 i（也等于 $I=i$）。

定理 5.　如果对于分割序列 δ_n，σ_{δ_n} 有确定的極限，而 δ_n' 是 δ_n 的后繼，那末 $\sigma_{\delta_n'}$ 也有相同的極限。

依定理 5 与定理 4 的条件可知 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$。依定理 1，$s_{\delta_n'}\geqslant s_{\delta_n}$，而 $S_{\delta_n'}\leqslant S_{\delta_n}$。所以 $S_{\delta_n'}-s_{\delta_n'}\to 0$，也就是說 $\sigma_{\delta_n'}\to i$，而定理

証明了。

在黎曼积分的情形，$g(x)=x$，以前 [I; 112] 証明对于任意有界函数 $f(x)$，无限地細分部分区間时，$s_{\delta_n}\to i$，$S_{\delta_n}\to I$。如此在黎曼积分的情形，等式 $i=I$ 与下面的命題同效：即和 σ_δ 当无限地細分部分区間时有确定的極限值，而且这極限值等于 i。在一般情形中，并非如此。如果当无限地細分諸部分区間时 σ_δ 有确定的極限，那末 $i=I$，这由定理 4 的系可知。但反过来的結論是不正确的。由 $i=I$ 只能推知有分割序列 δ_n 存在，使 σ_{δ_n} 有确定的極限。但不能斷定在无限地細分部分区間时对于一切分割序列 σ_δ 都有确定的同一極限①。在上述的斯提勒杰斯积分定义中，曾要求当无限地細分諸部分区間时 σ_δ 有确定的極限。在下面推广的积分概念中我們把这要求减弱，只要求等式 $i=I$ 成立。此外，将扩張分解积分的基本区間为部分的方法，在下面論新积分定义时再詳加解释。下节中将回到在[2]中定义的斯提勒杰斯积分，并叙述其存在性的一个重要的充分条件。

4. 連續函数的斯提勒杰斯积分

定理 1. 如果 $f(x)$ 在有穷区間 $[a, b]$ 上是連續的，而 $g(x)$ 是不减的有界函数，那末 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上依 $g(x)$ 的斯提勒杰斯积分必存在。

注意不等式(13)与(15)，可知

$$|i-\sigma_\delta|\leqslant S_\delta-s_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。\quad(19)$$

① 譯者注：設

$$当\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 0 \text{ 时 } f(x)=0; & -1\leqslant x<0 \text{ 时 } g(x)=0;\\ 0<x\leqslant 1 \text{ 时 } f(x)=1; & 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时 } g(x)=1;\end{cases}$$

那末不难看出 $i=I=0$，而如果取 δ_n 使它們每个的部分区間都不含 0 做内点，則 $\sigma_{\delta_n}\to 0$。但如果 δ 中的一个部分区間含 0 为内点，設这部分区間是 $[x_{i-1}, x_i]$，則 $\sigma_\delta=f(\xi_i)$，因而等于 0 或 1，視 $\xi_i\leqslant 0$ 或 >0 而定，因而 σ_δ 并无确定的極限。

設 ε 是預定的正数。既然 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上是一致連續的，必存在一个正数 η，使当諸差值 $x_k - x_{k-1}$ 中最大者不超过 η 时，$0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \varepsilon (k=1, 2, \cdots, n)$ 成立。依这不等式，由 (19) 可知 $|i - \sigma_\delta| \leqslant \varepsilon[g(b) - g(a)]$，所以无限地細分諸区間时，$\sigma_\delta \to i$。同样可証 $\sigma_\delta \to I$，所以 $i = I$。这等式也可以由定理 4 的系直接推出，因为当无限地細分諸区間时，σ_δ 有定極限。

无穷的积分区間在斯提勒杰斯积分的情形并不起重大的作用。只須解釋一下，所謂无限地細分无穷区間的部分区間究竟何所指。例如考察区間 $[-\infty, +\infty]$。我們說在一分这区間为有穷多部分区間的分割序列中，这些部分区間无限地細分，是指对于任意預定的正数 A，相应于一切与 $[-A, +A]$ 相交的部分区間 $[x_{k-1}, x_k]$，諸差值 $x_k - x_{k-1}$ 中最大者趋向于零。如果 $\varphi(x)$ 在区間 $[-\infty, +\infty]$ 中是連續的，并且是严格地增的，就是說当 $\beta > \alpha$ 时 $\varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$，那末变数代換 $t = \varphi(x)$ 把区間 $[-\infty, +\infty]$ 映像成有穷区間 $[a, b]$，而 $a = \varphi(-\infty)$，$b = \varphi(+\infty)$。对于 $[-\infty, +\infty]$ 的无限地細分的分割法就变成了平常对于有穷区間 $[a, b]$ 的无限地細分的分割法。

例如設 $f(x)$ 在閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 上連續，而 $g(x)$ 是有界而不減的，那末积分与以前一样是存在的。为了証明这点，只須把 x 代換成新变数 $t = \operatorname{arc\,tg} x$。令

$$f(\operatorname{tg} t) = f_1(t), \quad g(\operatorname{tg} t) = g_1(t),$$

我們就把无穷区間 $[-\infty, +\infty]$ 上的积分表达为有穷区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dg(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f_1(t) dg_1(t),$$

且 $f_1(t)$ 是在区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ 中連續的，而 $g_1(t)$ 在其上有界

而不減。

現在指出斯提勒杰斯积分存在的基本定理的一个实用的重要变形:

定理 2. 如果 $f(x)$ 在积分区間內部是連續而且有界的，而不減函数 $g(x)$ 在区間两端是連續的，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 可积分。

設积分区間是无穷区間 $[-\infty, +\infty]$。

估計一下公式(19)右边的諸項。旣然 $f(x)$ 是有界的，可知有一固定的正数 L 存在，使 $|f(x)|\leqslant L$，所以 $0\leqslant M_k-m_k\leqslant 2L$。(19)式的和中相应于不与 $[-A, A]$ 相交的区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 的諸項之和不大于

$$2L[g(-A)-g(-\infty)]+2L[g(+\infty)-g(A)]。 \quad (20)$$

依 $g(x)$ 在点 $\pm\infty$ 处連續的假設，可以取 A 足够大，使(20)式小于任意預定的正数 ε。如此固定了 A，并考察(19)的和中其余各項。这些区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 或者整个包含在 $[-A, +A]$ 之中，或者两端的两个可能溢出了 $[-A, +A]$，而其溢出部分之長不大于 η，这里的 η 是相应于一切与 $[-A, +A]$ 相交諸区間的差值 x_k-x_{k-1} 中的最大者。当无限地細分諸部分区間时数 η 趋向于零，因而自从分割的某一阶段之后，这数一定小于 1。如此从分割的某一阶段之后，所考虑的一切区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 必屬于 $[-A-1, A+1]$，而在此后一区間上 $f(x)$ 是一致連續函数。依此，对于足够小的值 η，可得 $0\leqslant M_k-m_k\leqslant\varepsilon$，而由此，在(19)式的和中凡相应于与 $[-A, +A]$ 相交的区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 的各項可以估計如下：

$0\leqslant(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]\leqslant\varepsilon[g(x_k)-g(x_{k-1})]$，而这些項的和不大于

$$\varepsilon[g(A+1)-g(-A-1)]。$$

最后由不等式(19)得

$$|i-\sigma_\delta|\leqslant\varepsilon[1+g(A+1)-g(-A-1)]\leqslant\varepsilon[1+g(+\infty)-g(-\infty)],$$

既然 ε 是任意的，可知 $\sigma_\delta \to i$，而定理証明了。

注意在 $f(x)$ 是連續函数而 $g(x)$ 是增函数的情形下，斯提勒杰斯积分的一些补充性質。如果 $|f(x)| \leqslant L$，那末

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant L[g(b)-g(a)], \tag{21}$$

这可以由对和 σ_δ 的估值并取極限得出。显然中値定理成立[I;92]：

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(\xi)[g(b)-g(a)] \quad (\xi \in [a, b])。 \tag{21$_1$}$$

現在設在 $[a, b]$ 中連續的函数 $f_n(x)$ 所組成的序列在这区間中一致收斂于極限函数 $f(x)$。后者在 $[a, b]$ 必然也是連續的，所以是依 $g(x)$ 可积分的。依序列 $f_n(x)$ 的一致收斂性，对于任意預定的正数 ε，必有一数 N 存在，使每当 $n > N$ 而 x 屬于 $[a, b]$ 时，恒有 $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$。应用估計(21)，得

$$\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,dg(x)\right| \leqslant \varepsilon[g(b)-g(a)],$$

由此既然 ε 是任意的，得

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)。 \tag{22}$$

利用定理 2 的証明中的估計，可証明公式(22)在下面假設之下仍然成立：設函数 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 内部連續，并以同一数为界，即有一正数 L，对于一切数 n，$|f_n(x)| \leqslant L$ 都成立；$f_n(x)$ 在位于 $[a, b]$ 内部的一切閉区間上都一致收斂于 $f(x)$，而 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 的两端連續。

5. 广义斯提勒杰斯积分 如果 $f(x)$ 在区間 $[-\infty, +\infty]$ 内部連續，并且有界，而 $g(x)$ 不減，并在这区間的两端連續，那末如上面所說的，$f(x)$ 依 $g(x)$ 在区間 $[-\infty, +\infty]$ 上的积分如平常一样地定义做有穷和 σ_δ 的極限。現在設在 $[-\infty, +\infty]$ 内部連續的函数 $f(x)$ 并非有界的，而 $g(x)$ 与以前一样是不減而有界的。对任

意的有穷数 a 及 b，可以作出 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上依 $g(x)$ 的积分。如果令 a 趋向于 $-\infty$，而 b 趋向于 $+\infty$ 时这积分有一有穷的确定極限值，那末这極限可以取做在区間 $[-\infty, +\infty]$ 上的积分值：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dg(x)。 \tag{23}$$

如果本节开始时所述的条件满足，而在区間 $[-\infty, +\infty]$ 上的积分做为和 σ_δ 的極限存在，那末不难証明公式(23)成立。

設积分 $\int_a^b |f(x)|dg(x)$ 对于任意 a 与 b 都是有界的。如此則存在积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b |f(x)|dg(x),$$

則显然积分(23)也存在[参照 II；82]，于是后者称为絕对收斂的。

考察无穷区間的某一分割，設其分点为 x_k $(k=\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots)$：

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots \tag{24}$$
$$\left(\lim_{k\to-\infty} x_k = -\infty, 而 \lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty\right)。$$

設 m_i 与 M_i 是 $f(x)$ 在区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上諸值的最小者与最大者，設 $\omega_i = M_i - m_i$。引用[4]的(21_1)得

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dg(x) - f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]\right| \leqslant \omega_i[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

而

$$\left|\int_{x_{-p}}^{x_q} f(x)dg(x) - \sum_{i=1-p}^{q} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1-p}^{q} \omega_i[g(x_i)-g(x_{i-1})]。 \tag{25}$$

設数集 ω_i $(i=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 有一有穷的上确界 $\omega = \sup\omega_i$。依 $f(x)$ 的連續性，可以作无穷区間的一分割，使 ω 小于任意預定的正数。引用下面的記号：

$$A=\lim_{x\to-\infty} g(x);\quad B=\lim_{x\to+\infty} g(x);$$

$$S_{p,q}=\sum_{i=1-p}^{q} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})];$$

$$S'_{p,q}=\sum_{i=1-p}^{q} |f(\xi_i)|[g(x_i)-g(x_{i-1})]。$$

又設 ω'_i 是对于 $|f(x)|$ 的 ω_i，而

$$\omega'=\sup \omega'_i 。$$

显然 $\omega'_i\leqslant\omega_i$，而 $\omega'\leqslant\omega$。由(25)得

$$\left|\int_{x_{-p}}^{x_q} f(x)dg(x)-S_{p,q}\right|\leqslant\omega(B-A), \tag{26$_1$}$$

而同样

$$\left|\int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|dg(x)-S'_{p,q}\right|\leqslant\omega'(B-A), \tag{26$_2$}$$

由此得

$$S'_{p,q}\leqslant\int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|dg(x)+\omega'(B-A), \tag{27}$$

及

$$\int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)|dg(x)\leqslant S'_{p,q}+\omega'(B-A)。 \tag{28}$$

现在証明关于积分(23)絕对收斂必要且充分条件的定理。

定理　积分(23)絕对收斂的必要且充分的条件乃是存在具有有穷的ω的分割，及相应的数 ξ_i，而后者满足不等式 $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，使級数

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] \tag{29}$$

絕对地收斂。如果这条件果然满足，那末对任意具有有穷 ω 的分割(24)，不論怎样从区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 选擇 ξ_i，級数(29)恒收斂，而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)=\lim_{\omega\to0}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]。 \tag{30}$$

設积分(23)絕对收斂。由此,依不等式(27),对任意具有有穷 ω 的分割:

$$S'_{p,q} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dg(x) + \omega'(B-A),$$

所以和 $S'_{p,q}$ 随着 p, q 的增大而增大,但总是有界的,所以对于任意具有有穷 ω 的分割,級数 (29) 絕对收斂。又依 (26_1) 可以立刻得 (30)。反之,設对于任意具有有穷 ω 的分割 (24) 及对于任意选的 ξ_i,級数(29)絕对收斂。由(28)直接可得

$$\int_{x_{-p}}^{x_q} |f(x)| dg(x) \leqslant \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |f(\xi_i)| [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \omega'(B-A),$$

由此可知当 p, q 增大时左边的积分常是有界的,所以积分(23)絕对收斂。但我們剛才看到对于任意具有有穷 ω 的分割与任意选擇的 ξ_i,級数(29)絕对收斂,并且(30)成立。

注 如果 $f(x)$ 在 $[-\infty, +\infty]$ 内一致連續,而 δ 是差值 $(x_i - x_{i-1})$ 中的最大者,那末由条件 $\delta \to 0$ 就可以推得 $\omega \to 0$,而在公式(30)中可以用 $\delta \to 0$ 代替 $\omega \to 0$。例如在 $f(x) = x$ 时这种情形就当真發生。

6. 跃度函数 現在对不減函数的性質加以初等的分析。因为單調的有界变数必有極限,不減函数 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中每一內点必有左右極限:$g(x-0)$ 及 $g(x+0)$。在左端有右極限 $g(a+0)$,而在右端有左極限 $g(b-0)$。如果 $g(x-0) = g(x+0)$,那末 x 是 $g(x)$ 的連續点。

同样,在端点的連續性可由等式 $g(a+0) = g(a)$ 及 $g(b-0) = g(b)$ 决定。在不連續点 x, $g(x+0) > g(x-0)$,而正差值 $S_x = g(x+0) - g(x-0)$。叫做 $g(x)$ 在 x 点的跃度。同样定义端点处的跃度。

函数 $g(x)$ 可能有无穷多个不連續点。現在証明在这情形下

不連續点的集合是可数的。函数 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的总增量可由正数 $g(b)-g(a)$ 表示。如此，跃度大于1的不連續点数目不大于 $g(b)-g(a)$ 的整数部分，所以如此的不連續点是有穷的。同样跃度大于 $\frac{1}{2}$ 的不連續点数目不大于 $2[g(b)-g(a)]$ 的整数部分，等等。現在不难証明 $g(x)$ 的不連續点可以附以标号。首先依某次序把跃度大于1的不連續点附以标号。再把跃度大于 $\frac{1}{2}$ 的諸点附以标号，余类推。

在积分連續函数时，可以不用位于区間 $[a, b]$ 内的 $g(x)$ 不連續点去分割积分区間，于是 $g(x)$ 在这些点的值在作成积分时不起什么作用。区間的端点則不同了，它們一定被取做分割点。例如可以設 $g(x)$ 不連續点在是右边連續，就是說 $g(x)=g(x+0)$。設 $h(x)$ 是如此改变 $g(x)$ 而得的函数，就是在 $g(x)$ 的連續点及在右端点 $h(x)=g(x)$，而在不連續点 $h(x)=g(x+0)$。只有 $g(x)$ 在区間左端的值的改变才会影响到积分的值，显然可得公式

$$\int_a^b f(x)dh(x)=\int_a^b f(x)dg(x)-f(a)[g(a+0)-g(a)]。$$

現在就 $g(x)$ 的不連續点把 $g(x)$ 分成两項，其中一項 $g_c(x)$ 是連續的不減函数，而另一項 $g_d(x)$ 代表 $g(x)$ 在区間 $[a, x]$ 上的跃度之和。这后一項通常叫做 $g(x)$ 的跃度函数。現在精确地作出这函数来。

設在区間 $[a, b]$ 上有有穷多或可数多个点 $c_k(k=1, 2, 3, \cdots)$。依下面公式定义者函数 $\varphi_k(x)$ 及 $\psi_k(x)$：

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}0 \text{ 如果 } x<c_k,\\ \alpha_k \text{ 如果 } x\geqslant c_k,\end{cases}\quad \psi_k(x)=\begin{cases}0 \text{ 如果 } x\leqslant c_k,\\ \beta_k \text{ 如果 } x>c_k,\end{cases}$$

而 α_k 及 β_k 是非負常数，并且級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \text{ 和 } \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \tag{31}$$

收斂。如果某一常数 α_k 等于零，那末相应的函数 $\varphi_k(x)$ 恒等于零，同样如果 $\beta_k=0$，$\psi_k(x)$ 恒等于零。在以后公式中將保存这些函数，以便把这些公式写成对称状。如果 $c_k=a$，那末可以算做其相应 $\alpha_k=0$，而如果 $c_k=b$，可以算做其相应 $\beta_k=0$。由級数 (31) 的收斂直接可知級数

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x);\quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x),\tag{32}$$

(其中諸項是非負的增函数)对于一切 x，特别是在 $[a, b]$ 上，一致收斂。如果 x 与 c_k 不同，那末这些級数的一切項在 x 点都是連續的，所以依一致連續性，函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在一切异于 c_k 的点 x 处是連續的。在 $x=c_k$ 点处項 $\varphi_k(x)$ 有左边跃度等于 α_k，項 $\psi_k(x)$ 有右边跃度等于 β_k，而其他各項是連續的。依一致收斂性，其余各項之和在 $x=c_k$ 处是連續的。如此，在点 $x=c_k$ 处函数 $\varphi_k(x)$ 有左边跃度等于 α_k，而在右边連續，函数 $\psi(x)$ 有右边跃度等于 β_k，而在左边連續。上面作法显然在点集合 c_k 为有穷时依然有效。

現在設 $g(x)$ 是某一增函数，而 $x=c_k$ 是其諸不連續点，α_k 及 β_k 各是它在这些点处的左边及右边跃度，就是說 $\alpha_k=g(c_k)-g(c_k-0)$，$\beta_k=g(c_k+0)-g(c_k)$。差值 $g(b)-g(a)$ 是函数 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内的总增量，而它在它前 n 个不連續点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 处的全跃度 $\gamma_k=\alpha_k+\beta_k$ 之和，不大于上述的差值，而这对于任意 n 都成立。如此由函数 $g(x)$ 的全跃度 γ_k 所組成的級数必收斂。于是由左边跃度 α_k 所作的及由右边跃度 β_k 所作的无穷級数更应收斂了。作函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$，而令 $g_d(x)=\varphi(x)+\psi(x)$。显然量 $g_d(x)$ 等于 $g(x)$ 在位于 x 的左边的一切不連續点处的全跃度与在点 x 本身处左跃度的和(如果后者确存在)，而差值 $g_d(\beta)-g_d(\alpha)$ 等于在位于 α 及 β 之間的不連續点处的跃度与在点 α 处的右跃度以及在点 β 处的左跃度之和。差值 $g(\beta)-g(\alpha)$ 是当 x 由 α 变到

β 时函数 $g(x)$ 的总增量，而 $g_d(\beta)-g_d(\alpha)$ 代表 $g(x)$ 由于其在諸不連續点处諸跃度而得的增量。如此可得下面的不等式：

$$g(\beta)-g(\alpha)\geqslant g_d(\beta)-g_d(\alpha)，\text{其中 } \beta>\alpha。$$

現在令 $g_c(x)=g(x)-g_d(x)$。由函数 $g_d(x)$ 的作法，与上面的不等式，可知函数 $g_c(x)$ 是連續而增的。如此可得所要求的分解式：

$$g(x)=g_d(x)+g_c(x)。\tag{33}$$

对于任意的区間，閉的或是不閉的，有勞的或是无勞的，都可以作如此的分解。对于任意的連續函数可以写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg_d(x)+\int_a^b f(x)dg_c(x)。\tag{34}$$

現在証明，上式右边的第一个积分可以表示成和的形式：

$$\int_a^b f(x)dg_d(x)=\sum_k f(c_k)\gamma_k,\tag{35}$$

而 c_k 表示 $g(x)$ 的間断点，而 γ_k 是 $g(x)$ 在这些点处的全跃度。我們将姑且設这类間断点的数目无勞。令 $\omega_k(x)=\varphi_k(x)+\psi_k(x)$，我們可以写成

$$g_d(x)=s_m(x)+r_m(x),$$

而 $$s_m(x)=\sum_{k=1}^{m}\omega_k(x);\quad r_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}\omega_k(x)。$$

由此得不等式 $0\leqslant r_m(x)\leqslant \gamma_{m+1}+\gamma_{m+2}+\cdots$，而由于由 γ_k 所成的級数收斂，所以对于任意預給的正数 ε，可以取定一个数 N，使对于任意的 x，

$$0\leqslant r_m(x)\leqslant\varepsilon,\quad \text{当 } m>N \text{ 时恒成立。}\tag{36}$$

又由于 $f(x)$ 的連續性，得[2]：

$$\int_a^b f(x)d\omega_k(x)=f(c_k)\gamma_k,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\,ds_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\gamma_k。 \tag{37}$$

函数 $f(x)$ 是有界的，就是説 $|f(x)|\leqslant L$，而对于上写的和中諸項，可得 $|f(c_k)\gamma_k|\leqslant L\gamma_k$，由此看出由数 $f(c_k)\gamma_k$ 作的級数是絕对收斂的。

对于依不減函数 $r_m(x)$ 的积分，依(36)可得估値

$$\left|\int_a^b f(x)\,dr_m(x)\right| \leqslant L\varepsilon\ (m>N),$$

由此，既然 ε 是任意的，可知差値

$$\int_a^b f(x)\,dg_d(x) - \int_a^b f(x)\,ds_m(x) = \int_a^b f(x)\,dr_m(x)$$

当 m 增大时趋向于零，就是説

$$\int_a^b f(x)\,dg_d(x) = \lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\,ds_m(x),$$

由此，依(37)得公式

$$\int_a^b f(x)\,dg_d(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)\gamma_k。 \tag{38}$$

7. 物理的解釋 現在对函数 $g(x)$ 及斯提勒杰斯积分加以物理的解釋。設在区間 $[a, b]$ 上有物質分布其上，并設 $g(x)$ 是在区間 $[a, x]$ 上的質量，而 $g(a)$ 是在点 $x=a$ 处的質量，如果如此集中的質量存在。在相反的情形下令 $g(a)=0$。差値 $g(d)-g(c)$ 表示区間 $(c, d]$ 上的質量。当正数 h 趋向于零时，区間 $(x, x+h]$ 縮小，而任意点当 h 足够小时都要出于区間 $(x, x+h]$ 之外，因为其左端不屬于这区間。函数 $g(x)$ 是增函数（質量是正的），而依上所述，自然要使这表示質量分布特征的函数 $g(x)$ 滿足条件 $g(x+h)-g(x)\to 0$，就是説，$g(x)=g(x+0)$，就是函数 $g(x)$ 应当在 $x=b$ 以外一切間断点处右連續。談論区間右端的連續性是无意义的，因为 $x>b$ 时函数不定义。在区間之内，在 $g(x)$ 的間断点处有集中的質量，而这集中質量由差値 $g(x)-g(x-0)$ 决定。对于区間

之右端也一样。区間$[a, b]$上物質总量等于$g(b)$。上述一切对于有穷的及无穷的区間都成立。上面推理的特征乃是不引用分布密度的概念。分布的質量的重心由公式

$$x_c=\frac{1}{g(b)}\int_a^b x\,dg(x)$$

决定。这公式对于有穷区間成立。在无穷区間的情形，被积分的函数$f(x)=x$不是有界函数，从而必須引用广义积分的定义。

在概率論中函数$g(x)$平常表示某一随机变量的分布概率，就是$g(x)$等于随机变量屬于$(-\infty, x]$的概率。在这里，与上面一样，$g(x)$是右連續的。連續函数的斯提勒杰斯积分概念可以直接推广到$g(x)$等于两个不减函数之差的情形：$g(x)=g_1(x)-g_2(x)$。在这情形中也容易給$g(x)$以物理学的解释。設在区間$(-\infty, +\infty)$上分布有正負电荷。$g_1(x)$表示区間$(-\infty, x]$上总正电荷，而$g_2(x)$表示这区間上的总負电荷。

8. 囿变函数 以前一直設积分函数$g(x)$是增的。为了进而討論依更一般的函数$g(x)$作积分，介紹一类新函数，做为包含一切积分函数的基本函数类。設在閉的有穷或无穷区間$[a, b]$上有一函数$g(x)$，它在这区間的一切点处都取有穷数值。設δ是把$[a, b]$分成部分的分割：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$。作和

$$t_\delta=\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|。\tag{39}$$

定义 如果对于一切可能的分割δ，上面的和是有界的，那末函数$g(x)$叫做区間$[a, b]$上具有囿变化的函数，或称做这区間上的囿变函数，而(39)中和的上确界叫做函数$g(x)$在区間$[a, b]$上的全变分，或简称变分，并表成$V_a^b(g)$。現在注意和t_δ与全变分的几个簡單性質。如果在点x_k及x_{k-1}之間取一新分割点c，那末由公式

$$g(x_k)-g(x_{k-1})=[g(x_k)-g(c)]+[g(c)-g(x_{k-1})]$$

可得

$$|g(x_k)-g(x_{k-1})|\leqslant|g(x_k)-g(c)|+|g(c)-g(x_{k-1})|,$$

所以加添新分割点时和 t_δ 不会减小。又如果由非負項所成的和 t_δ 对于区間 $[a, b]$ 是有界的，那末对于 $[a, b]$ 的任意一部分区間 $[\alpha, \beta]$ 更是有界的，所以如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是囿变的，那末它在区間 $[a, b]$ 的任意部分区間 $[\alpha, \beta]$ 上也是囿变的，并且 $V_\alpha^\beta(g)\leqslant\leqslant V_a^b(g)$。

如果整个地取区間 $[a, b]$，这也是它的一个可能分割，既然对于任意分割 $t_\delta\leqslant V_a^b(g)$，則在此特別情形

$$|g(b)-g(a)|\leqslant V_a^b(g)。\tag{40}$$

如果 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 区間上的單調函数，那末一切差值 $g(x_k)-g(x_{k-1})$ 的符号相同，因而不管 δ 如何作法，对于增函数 $g(x)$，和 t_δ 等于 $g(b)-g(a)$，而对于减函数則等于 $g(a)-g(b)$，所以凡單調函数必是囿变函数。

現在陈述几个关于囿变函数的定理：

定理 1. 如果 $g(x)$ 是在 $[a, b]$ 上囿变的，那末它在这区間上是有界的。

对于区間 $[a, b]$ 的任意点 x 可以写成 $g(x)=g(a)+[g(x)-g(a)]$，所以 $|g(x)|\leqslant|g(a)|+|g(x)-g(a)|$，而依 (40)，$|g(x)|\leqslant g(a)+V_a^x(g)\leqslant g(a)+V_a^b(g)$，从而証明了 $g(x)$ 是有界的。

定理 2. 如果 $g(x)$ 与 $h(x)$ 是 $[a, b]$ 上的囿变函数，那末 $cg(x)$ (c 是常数) 与 $g(x)+h(x)$ 也都是囿变函数。

証明二者之和的情形。对于 $g(x)+h(x)$ 作和 t_δ：

$$t_\delta=\sum_{k=1}^{n}|[g(x_k)+h(x_k)]-[g(x_{k-1})+h(x_{k-1})]|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k-1})|。$$

后两和都是有界的，因为依所設 $g(x)$ 与 $h(x)$ 是囿变函数。所以 t_3 是有界的，因此 $g(x)+h(x)$ 是囿变函数。

系 囿变函数的任意有穷綫性組合式——就是凡作 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_pf_p(x)$ 形式的函数——仍是囿变函数。

定理 3. 如果 $g(x)$ 与 $h(x)$ 是囿变函数，那末它們的积也是囿变函数。如果此外并設 $|h(x)|\geqslant m>0$，那末商 $g(x):h(x)$ 也是囿变函数。

現在討論积，并作它的 t_3：

$$t_3=\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)h(x_k)-g(x_{k-1})h(x_{k-1})|。\tag{41}$$

注意 $g(x)$ 与 $h(x)$ 必是有界的，所以有一正数 L 存在，使 $|g(x)|\leqslant\leqslant L$，$|h(x)|\leqslant L$。显然

$$g(x_k)h(x_k)-g(x_{k-1})h(x_{k-1})=$$
$$=g(x_k)[h(x_k)-h(x_{k-1})]+h(x_{k-1})[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

再依(41)可得

$$t_3\leqslant\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)|\,|h(x_k)-h(x_{k-1})|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}|h(x_{k-1})|\,|g(x_k)-g(x_{k-1})|,$$

就是說

$$t_3\leqslant L\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k-1})|+L\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|。$$

但上面两和都是有界的，因为依所設，$g(x)$ 与 $h(x)$ 都是囿变函数；因此和 t_3 是有界的，而定理証明了。

定理 4. 如果 $a<c<b$，而 $g(x)$ 是在 $[a,b]$ 上的囿变函数，那末它在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上也都是囿变函数；反之，如果它在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上是囿变函数，那末它在 $[a,b]$ 上也是囿变函数。这时，下面的公式成立：

$$V_a^b(g)=V_a^c(g)+V_c^b(g)。\tag{42}$$

上面曾看到，如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是囿变函数，那末它在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上也是囿变函数。現在只剩下証明逆命题及公式(42)。令 t_δ 表示对 $[a, b]$ 作的和(39)，而 $t_{\delta_1}^{(1)}$ 及 $t_{\delta_2}^{(2)}$ 各表对 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 作的类似的和。如果点 c 是 δ 的一分割点，那末分割 δ 分成区間 $[a, c]$ 的分割 δ_1 及区間 $[c, b]$ 的分割 δ_2，而 $t_\delta = t_{\delta_1}^{(1)} + t_{\delta_2}^{(2)}$。如果 $g(x)$ 在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上都是囿变函数，那末依上面公式得 $t_\delta \leqslant V_a^c(g) + V_c^b(g)$。所以如果 c 是分割点，和 t_δ 是有界的。对于其他分割，这和更是有界的，因为添加分割点只会使 t_δ 增大。由此可知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是囿变函数，而 $V_a^b(g) \leqslant V_a^c(g) + V_c^b(g)$。現在若再証明与此相反的不等式，于是公式(42)就可以得到了。設 ε 是预定的正数。依上确界的定义，可以在公式 $t_\delta = t_{\delta_1}^{(1)} + t_{\delta_2}^{(2)}$ 中取分割 δ_1 及 δ_2，使 $t_{\delta_1}^{(1)} > V_a^c(g) - \varepsilon$，$t_{\delta_2}^{(2)} > V_c^b(g) - \varepsilon$。因此 $t_\delta > V_a^c(g) + V_c^b(g) - 2\varepsilon$，由此，$V_a^b(g) > V_a^c(g) + V_c^b(g) - 2\varepsilon$。$\varepsilon$ 旣然是任意的，$V_a^b(g) \geqslant V_a^c(g) + V_c^b(g)$，于是定理証明了。

系 我們証明了区間 $[a, b]$ 分成两部分的情形。应用这定理若干次，則对于把 $[a, b]$ 分割成有穷多部分区間的情形也得到类似的結論，就是說，如果区間 $[a, b]$ 分成有穷多部分区間，而 $g(x)$ 在全区間上是囿变函数，那末它在每一部分区間上也是囿变函数，反之也正确。此外，在全区間上的全变分等于在各部分区間上的全变分之和。这性質通常叫做全变分的加法性，可以写成下列形式：

$$V_a^b(g) = V_a^{c_1}(g) + V_{c_1}^{c_2}(g) + \cdots + V_{c_{n-1}}^b(g)。\tag{43}$$

定理 5. $g(x)$ 是囿变函数的必要且充分的条件乃是它可以表成两个增函数的差。

充分性是显然的，因为凡增函数是囿变函数，而依定理 2，囿变函数的差仍是囿变函数。現在証明必要性，就是要証明如果 $g(x)$ 是囿变函数，那末它必可以表示成两个增函数的差。如果令

$$g_1(x)=\frac{1}{2}[V_a^x(g)+g(x)];\quad g_2(x)=\frac{1}{2}[V_a^x(g)-g(x)],\tag{44}$$

那末可得

$$g(x)=g_1(x)-g_2(x),\tag{45}$$

从而只須証明函数 $g_1(x)$ 及 $g_2(x)$ 是增函数就够了。現在只就 $g_1(x)$ 証明。設 α 及 β 屬于 $[a, b]$，而 $\alpha<\beta$。那末

$$g_1(\beta)-g_1(\alpha)=\frac{1}{2}[V_a^\beta(g)-V_a^\alpha(g)+g(\beta)-g(\alpha)],$$

而依全变分的加法性，得

$$g_1(\beta)-g_1(\alpha)=\frac{1}{2}[V_\alpha^\beta(g)+g(\beta)-g(\alpha)]。$$

但依(40)，$V_\alpha^\beta(g)\geqslant|g(\beta)-g(\alpha)|$，从而 $g_1(\beta)-g_1(\alpha)\geqslant 0$。

系　增函数 $g_1(x)$ 及 $g_2(x)$ 只能有有穷多或可数无穷多个間断点，而在一切間断点处它都有左右極限。所以函数 $g(x)$ 也只有有穷多或可数无穷多間断点，并且在每个間断点都有左右極限。

定理 6.　如果在某点 $x=c$ 处函数 $g(x)$ 是連續的，那末在这点处函数 $V_a^x(g)=v(x)$ 也是連續的，逆命題也正确。如果 $g(x)$ 是右(左)連續的，那末 $v(x)$ 也是右(左)連續的，逆命題也正确。

設 $c<b$，并考察右連續的情形以示范。設 ε 是預定的正数。把 $[c, b]$ 分成部分：$c=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，使不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|>V_c^b(g)-\varepsilon\tag{46}$$

成立。如果加添新的分割点，上面不等式自然仍成立。因此可設 x_1 点与 c 很近，以使 $|g(x_1)-g(c)|<\varepsilon$。这时我們用了 $g(x)$ 在 c 点右連續的性質。我們可以把不等式(46)写成

$$|g(x_1)-g(c)|+\sum_{k=2}^{n}\left|g(x_k)-g(x_{k-1})\right|>V_c^b(g)-\varepsilon,$$

因为 $|g(x_1)-g(c)|<\varepsilon$，可得

$$\sum_{k=2}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|>V_c^b(g)-2\varepsilon。$$

左边的和乃是对于区間$[x_1, b]$作的某一和t_s，而依上面的不等式得

$$V_{x_1}^b(g)>V_c^b(g)-2\varepsilon,$$

而依全变分的加法性，可得$V_c^{x_1}(g)<2\varepsilon$，从而$v(x_1)-v(c)<2\varepsilon$。函数$v(x)$是增函数，而依上面不等式可得$v(c+0)-v(c)<2\varepsilon$，由此既然$\varepsilon$是任意的，得$v(c+0)=v(c)$，就是説$v(x)=V_a^x(g)$在$x=c$点处右連續。反之，如果已知$v(x)$是右連續的，那末依(40)可得$|g(c+h)-g(c)|\leqslant v(c+h)-v(c)$，而当正数$h$趋向于零时，右边趋向于零，所以左边也必趋向于零，于是証明了$g(x)$在点$x=c$处的右連續性。

系 如果$g(x)$在点c处是連續的，那末依所証的，由(44)式定义的函数$g_1(x)$及$g_2(x)$在$x=c$处也是連續的。显然对于左右連續也可得同样的結果。

定理 7. 如果$g(x)$是囿变函数，而

$$g(x)=g_1^*(x)-g_2^*(x) \tag{47}$$

是把$g(x)$表成两增函数之差的某一式，并設这与表示法(45)不同，那末对于屬于$[a, b]$的任意α与β，其中$\alpha<\beta$，下面不等式必成立：

$$\begin{aligned}g_1(\beta)-g_1(\alpha)\leqslant g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha);\\ g_2(\beta)-g_2(\alpha)\leqslant g_2^*(\beta)-g_2^*(\alpha)。\end{aligned} \tag{48}$$

我們只証明第一不等式以示范，这式可以写成

$$\frac{1}{2}[V_\alpha^\beta(g)+g(\beta)-g(\alpha)]\leqslant g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha)。 \tag{49}$$

我們用归謬証法。設相反的不等式成立：

$$\frac{1}{2}[V_\alpha^\beta(g)+g(\beta)-g(\alpha)]>g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha)。 \tag{50}$$

取区間$[\alpha,\beta]$的一分割δ，使和t_δ与全变分$V_\alpha^\beta(g)$相差足够小，結果在(50)式中用t_δ代替这全变分时不等式仍然成立。如此，对于某一分割$\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=\beta$可得

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|+g(\beta)-g(\alpha)\right]>g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha)。\quad(51)$$

另一方面，可以写成

$$g(\beta)-g(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}[g(x_k)-g(x_{k-1})];$$

$$g_1^*(\beta)-g_1^*(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}[g_1^*(x_k)-g_1^*(x_{k-1})],$$

所以不等式(51)可以写成

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[|g(x_k)-g(x_{k-1})|+g(x_k)-g(x_{k-1})]>$$

$$>\sum_{k=1}^{n}[g_1^*(x_k)-g_1^*(x_{k-1})]。$$

左边至少有一項大于右边的相应項。設这項的标号是$k=p$。于是

$$\frac{1}{2}[|g(x_p)-g(x_{p-1})|+g(x_p)-g(x_{p-1})]>$$

$$>g_1^*(x_p)-g_1^*(x_{p-1})。\quad(52)$$

如果$g(x_p)-g(x_{p-1})\leqslant 0$，那末不等式不能成立，因为其左边是零，而由于$g_1^*(x)$是增函数，右边是非負数。所以必須設$g(x_p)-g(x_{p-1})>0$。依此，不等式(52)可以写成下面形式：

$$g(x_p)-g(x_{p-1})>g_1^*(x_p)-g_1^*(x_{p-1}),$$

而依(47)可得

$$-[g_2^*(x_p)-g_2^*(x_{p-1})]>0,$$

这是不对的，因为$g_2^*(x)$是增函数。如此得出不可能的結論来，从而不等式(49)成立，而定理証明了。

依公式(44)定义两增函数$g_1(x)$与$g_2(x)$，并用(45)把囿变函数$g(x)$表成前二者的差，这种表示法通常叫做囿变函数表成两增

函数的差的典式。依所証的定理，出現于典式的两函数 $g_1(x)$ 及 $g_2(x)$ 較出現于其他表示法的函数增加得慢。如果对 $g_1(x)$ 及 $g_2(x)$ 各加同一常数 c，那末二者的差并不改变，而它們在区間 $[a, b]$ 的任意部分 $[\alpha, \beta]$ 上的增量也不变，并且把 $g(x)$ 表成 $g_1(x)+c$ 及 $g_2(x)+c$ 的差的形式仍是典式。

注 两增函数 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 中的每一个都可以分解成跃度函数与連續部分：

$$g_1(x)=g_{1d}(x)+g_{1c}(x);\quad g_2(x)=g_{2d}(x)+g_{2c}(x)。$$

于是原来的函数 $g(x)$ 也可以分解成完全确定的跃度函数及連續部分：

$$g(x)=[g_{1d}(x)-g_{2d}(x)]+[g_{1c}(x)-g_{2c}(x)]。\qquad (53)$$

9. 囿变的积分函数 如果 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上連續的函数，而 $g(x)$ 是其上的囿变函数，那末引用 $g(x)$ 表成两增函数之差的表示法，可得

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g_1(x_k)-$$

$$-g_1(x_{k-1})]-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g_2(x_k)-g_2(x_{k-1})]。\qquad (54)$$

当无限地細分諸部分区間时，右边的两和都有确定的極限，所以左边的和也有确定的極限，就是說，連續函数依囿变函数也可积分。在(54)式中取極限值，可得

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg_1(x)-\int_a^b f(x)dg_2(x)。\qquad (55)$$

現在指出当 $g(x)$ 是囿变函数时陈述斯提勒杰斯积分性質时所应作的改变。如果 $|f(x)|\leqslant L$，那末

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|\leqslant LV_a^b(g)。$$

取極限值，可得

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leqslant LV_a^b(g)。\tag{56}$$

这公式代替了[4]的公式(21)。还要記起[2]的公式：

$$\int_a^b f(x)d\sum_{k=1}^p a_k g_k(x) = \sum_{k=1}^p a_k\int_a^b f(x)dg_k(x)。\tag{57}$$

如果 $g_k(x)$ 是囿变函数，那末它們的綫性組合式 $a_1g_1(x)+\cdots+$ $+a_pg_p(x)$ 也是囿变函数。

就 $f(x)$ 是連續的，而 $g(x)$ 是囿变的情形考察具有变化的上限的斯提勒杰斯积分：

$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t)。\tag{58}$$

現在証明函数 $F(x)$ 是囿变函数。对于 $[a, x]$ 作和 t_δ：

$$t_\delta = \sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dg(t)\right|。$$

引用公式(56)，得

$$t_\delta \leqslant L\sum_{k=1}^n V_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = LV_a^b(g),$$

由此可得所要証明的。在 $g(x)$ 的連續点处，函数 $V_a^x(g)$ 是連續的，而依不等式

$$\left|\int_x^{x+h} f(x)dg(x)\right| \leqslant LV_x^{x+h}(g),$$

可知在这类点处 $F(x)$ 也是連續的①。还要証明下面的命題：如果 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的，而 $g(x)$ 是囿变的，那末

---

① 譯者注：在黎曼积分 $[g(x)=x]$ 的情形下，如 $f(x)$ 可积分，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 必是連續函数。这一性質实依賴于 $g(x)$ 的連續性。如令 $a=-1$，$b=+1$，当 $x<0$ 时 $g(x)=0$，而当 $x\geqslant 0$ 时 $g(x)=1$，而 $f(x)=1$，则 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dg(t)$ 在 $x=0$ 处是間断的。

$$\int_c^b \varphi(x) d\left[\int_a^x f(t) dg(t)\right] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dg(x)。 \qquad (59)$$

只須就 $g(x)$ 是增函数的情形証明就够了。对于(59)左边积分作和 σ_δ：

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dg(t),$$

而依中值定理[4]：

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) f(\xi_k') [g(x_k) - g(x_{k-1})]。 \qquad (60)$$

点 ξ_k' 与 ξ_k 屬于同一部分区間，而与証明[2]中的(9)时一样，可以証明在公式(60)中右边的和以(59)式右边的积分值为極限，于是(59)式証明了。

10. 斯提勒杰斯积分的存在 我們一直只考慮了連續函数 $f(x)$ 依增函数 $g(x)$ 或依有界变差函数的斯提勒杰斯积分。现在討論斯提勒杰斯积分存在的一般条件。

首先注意在这問題中分部积分公式的作用[2]。以前曾証明，由这公式中一个积分的存在可以导出另一个的存在。例如我們已知任意連續函数 $f(x)$ 是依任意有界变差函数 $g(x)$ 可积分的。反之，依上述公式，有界变差函数依連續函数也是可积分的。

現在証明几个簡單定理，它們就 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都是有界函数的情形而論及可积分的条件。

定理 1. 如果 $g(x)$ 是不减函数，而 $f(x)$ 的某一間断点与 $g(x)$ 的一間断点重合，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的斯提勒杰斯积分不存在。

設 $x=c$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共間断点，而为了明确起見，設 c 是位于区間 $[a, b]$ 之内的，并引用不以 c 为分割点的那些分 $[a, b]$ 为部分的分割。考慮(16)式的和中相应于包含 c 点的部分区間的那項，該項中 $g(x_k)-g(x_{k-1})$ 差值不小于 $g(x)$ 在 $x=c$ 点的跃度，而差值 $(M_k - m_k)$ 也必大于一个确定正数，因为 $f(x)$ 在 c 点也是不連續的。如此由正項所加成的和(16)当无限地細分諸区間时并不趨向于零，所以 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分不存在。

不設 $g(x)$ 是不减函数也可以証明这定理。

定理 2. 如果 $f(x)$ 是在区間 $[a, b]$ 上的有界函数，而不减函数 $g(x)$ 表示

成两个不减函数之和的形式：$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$，那末$f(x)$依$g(x)$的积分存在的必要且充分的条件乃是$f(x)$依$g_1(x)$与$f(x)$依$g_2(x)$的积分存在。

在[3]中已看到，$f(x)$依$g(x)$的积分存在的必要且充分的条件乃是由非負項所組成的和

$$S_\delta-s_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})] \tag{61}$$

当无限地細分$[a, b]$时趋向于零。在現在討論的情形中，这和分解成两个由非負項所成的和：

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g_1(x_k)-g_1(x_{k-1})]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g_2(x_k)-g_2(x_{k-1})],$$

而和(61)趋向于零的必要且充分的条件乃是上面公式中右边的两和趋向于零；于是定理証明了。如果$f(x)$依$g(x)$是可积分的，那末公式(3)成立：

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg_1(x)+\int_a^b f(x)dg_2(x).$$

既然非减函数$g(x)$分解成跃度函数$g_d(x)$与其連續部分$g_c(x)$，我們可以把$f(x)$依$g(x)$的积分存在的問題归結成$f(x)$依$g_d(x)$及$f(x)$依$g_c(x)$的积分存在的問題。如果定理1中所述的可积分性必要条件滿足，就是說$f(x)$的間断点与$g(x)$的間断点不重合，那末可以証明$f(x)$依$g_d(x)$是可积分的，即下列定理成立：

定理3. 如果有界函数$f(x)$的間断点不与$g_d(x)$的間断点重合，那末$f(x)$依$g_d(x)$的积分存在，并且可以由公式(35)表示。

既然依条件$f(x)$在c_k諸点处是連續的，并且$f(x)$是有界的，那末如上面一样，对于任意的有穷的m，公式(37)成立，而由数$f(c_k)\gamma_k$所成的級数絕对收斂。用A表示这級数之和。作A与对于$f(x)$依$g_d(x)$的积分所作的和σ_δ的差，并表成下面形式：

$$A-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g_d(x_k)-g_d(x_{k-1})]=\left[A-\sum_{k=1}^{m}f(c_k)\gamma_k\right]+$$

$$+\left\{\sum_{k=1}^{m}f(c_k)\gamma_k-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[s_m(x_k)-s_m(x_{k-1})]\right\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[r_m(x_k)-r_m(x_{k-1})]. \tag{62}$$

首先固定一个大数 m，使对于給定的正数 ε，下面的不等式成立：

$$\left|A-\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\gamma_k\right| \leqslant \varepsilon; \quad 0 \leqslant r_m(x) \leqslant \varepsilon.$$

依此，因为 $|f(x)| \leqslant L$，可得

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)[r_m(x_k)-r_m(x_{k-1})]\right| \leqslant L[r_m(b)-r_m(a)] \leqslant L\varepsilon.$$

注意(37)，可知固定了 m，并足够地細分区間时，(62)中右边的第二項依絕对值小于 ε。如此当足够地細分区間时，可依(62)得

$$|A-\sigma_\delta| \leqslant \varepsilon(2+L),$$

而既然 ε 是任意的，可知 $f(x)$ 依 $g_d(x)$ 是可积分的，并且这积分由公式(35)表示，于是定理証明了。

如此，如果定理1中可积分性的必要条件滿足，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的可积分性問題归結成 $f(x)$ 依 $g_c(x)$ 的可积分性問題。如果，比如說，$f(x)$ 是增函数，或是囿变函数，那末 $f(x)$ 依 $g_c(x)$ 的积分存在可由分部积分公式得出，因为 $g_c(x)$ 是連續的。

現在陈述 $f(x)$ 依 $g_c(x)$ 的可积分性的必要且充分的条件，而不加証明：对于任意預定的正数 ε，可以用有穷多或可数无穷多区間 $[a_k, b_k]$（这些区間可以互相叠复）把 $f(x)$ 的間断点蓋起，并使

$$\sum_k [g_c(b_k)-g_c(a_k)] \leqslant \varepsilon.$$

到此为止，在所討論的情形中，一直設 $g(x)$ 是不減函数。現在設 $g(x)$ 是囿变函数。設有这函数的分解典式(45)与另一分解式(47)。对于 $g_1(x)$ 与 $g_1^*(x)$ 作差値 $S_\delta-s_\delta$：

$$S_\delta-s_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g_1(x_k)-g_1(x_{k-1})];$$

$$S_\delta^*-s_\delta^*=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g_1^*(x_k)-g_1^*(x_{k-1})].$$

在上面已經看到，

$$g_1(x_k)-g_1(x_{k-1}) \leqslant g_1^*(x_k)-g_1^*(x_{k-1}),$$

所以当无限地細分区間时由 $S_\delta^*-s_\delta^* \to 0$ 可知 $S_\delta-s_\delta \to 0$，就是說如果函数 $f(x)$ 依 $g_1^*(x)$ 是可积分的，那末它依 $g_1(x)$ 也是可积分的。同样，如果 $f(x)$ 依 $g_2^*(x)$ 是可积分的，那末它依 $g_2(x)$ 也是可积分的。逆命題不成立，这是可以証明的。如此，檢驗 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的可积分性就是檢驗 $f(x)$ 依 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$

的可积分性。如果証明了 $f(x)$ 依 $g_1(x)$ 与依 $g_2(x)$ 是可积分的，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分也是存在的，并且可以借公式(55)表示出来。我們已知，$f(x)$ 依 $g_1(x)$ 与依 $g_2(x)$ 的可积分性与它依函数 $v(x)=g_1(x)+g_2(x)$ 的可积分性是同效的，而依(44)这函数等于在区間 $[a, x]$ 上的全变分 $V_a^x(g)$。如此，如果 $f(x)$ 依增函数 $v(x)$ 可积分，那末它依 $g(x)$ 也可积分。

11. 斯提勒杰斯积分号下取極限 在本节中及在下几节中将陈述几个定理，論及在斯提勒杰斯积分号下取極限值。我們在以前已經有过一个这种定理了。它講到可积分的函数序列一致地收斂于極限函数 $f(x)$ 的情形。設 $f_n(x)$ 是在 $[a, b]$ 区間上連續的，而 $f_n(x)\to f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致地收斂，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是囿变函数。依[4]及公式(55)可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x)。\tag{63}$$

現在証明这命題的几个簡單的推广，并只限于討論无穷区間。

定理 1. 設 $f_n(x)$ 在 $[-\infty, +\infty]$ 內是連續的，并設它們以同一个与 n 无关的数为界：$|f_n(x)|\leqslant L$，$f_n(x)$ 在任意的有穷区間上都一致地 $\to f(x)$，而 $g(x)$ 是在区間 $[-\infty, +\infty]$ 上的囿变函数，并在这区間两端是連續的。如此，对于区間 $[-\infty, +\infty]$，公式(63)也成立。

函数 $f(x)$ 在 $[-\infty, +\infty]$ 內部是連續的，并且是有界的，所以依 $g(x)$ 是可积分的。注意 $g(x)$ 在区間两端都是連續的，所以它的全变分也如此。又注意 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant 2L$，所以引用(56)可証对于任意預定的正数 ε，必有一正数 A 存在，使对于任意 n

$$\left|\int_A^{\infty}[f(x)-f_n(x)]\,dg(x)\right|\leqslant\varepsilon;\ \left|\int_{-\infty}^{-A}[f(x)-f_n(x)]\,dg(x)\right|\leqslant\varepsilon。$$

在区間 $[-A, +A]$ 中，極限 $f_n(x)\to f(x)$ 是一致的，因此，依上面提过的定理，对于一切足够大的数 n：

$$\left|\int_{-A}^{+A}[f(x)-f_n(x)]\,dg(x)\right|\leqslant\varepsilon,$$

所以

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f_n(x)]\,dg(x)\right|\leqslant 3\varepsilon,$$

因此，既然 ε 是任意的，可得所要証明的定理。現在对于下面情形証明类似的定理：即設函数 $f_n(x)$ 在区間 $[-\infty, +\infty]$ 上无界，而在这区間所取的积分是广义积分。

定理 2. 設$f_n(x)$在$[-\infty, +\infty]$內部連續，而广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dg(x) = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty \\ \beta\to+\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dg(x)。 \tag{64}$$

对于n一致地存在，$f_n(x)$在任意的有穷区間中一致地收斂于$f(x)$，$g(x)$在任意的有穷区間內部是囿变函数。如此則$f(x)$依$g(x)$在区間$[-\infty, +\infty]$上的(广义)积分存在，并且(63)式成立。

函数$f(x)$在任意有穷区間中是連續的，并在这样的区間中依$g(x)$是可积分的。現在証明它依无穷区間也可积分。設ε是預定的正数。因为积分(64)对于n是一致收斂的，一定存在正数A，使对于位于$[-A, +A]$外的任意区間$[B', B'']$与任意的数n，

$$\left|\int_{B'}^{B''} f_n(x)dg(x)\right| \leqslant \varepsilon 。 \tag{65}$$

以某种方式固定B'与B''，使区間$[B', B'']$位于$[-A, +A]$外。如此，由于在区間$[B', B'']$內$f_n(x)\to f(x)$是一致收斂，对于足够大的n必可使

$$\left|\int_{B'}^{B''} [f(x)-f_n(x)]dg(x)\right| \leqslant \varepsilon 。 \tag{66}$$

注意显然的等式

$$\int_{B'}^{B''} f(x)dg(x) = \int_{B'}^{B''} f_n(x)dg(x) + \int_{B'}^{B''} [f(x)-f_n(x)]dg(x),$$

并依(65)与(66)可得

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dg(x)\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

由此乃知$f(x)$在$[-\infty, +\infty]$上依$g(x)$的积分存在。为了証明公式(63)，只須注意，在足够远的区間上，差$f(x)-f_n(x)$的积分的絕对值成为任意小，而在有穷区間上，当取n足够大时，依$f_n(x)$对于$f(x)$的一致收斂性，这差的积分也成为任意小。

注意，在有穷区間的情形，对于公式(63)的成立，并不須設$f_n(x)$一致收斂于$f(x)$。只須設連續函数$f_n(x)$趋向于連續函数$f(x)$，同时与n无关地有界，就是說存在一个正数L，使对于任意n与$[a, b]$中任意的x不等式$|f_n(x)| \leqslant L$都成立。我們将在[50]以后証明这命題。

12. 黑利定理 現在考察积分函数$g(x)$变化时取極限值的定理。首先研究囿变函数趋向于極限函数的問題。設$g_n(x)$是区間$[a, b]$上的囿变函数

序列，并且这些函数的变分都以同一个与 n 无关的数 L 为界：

$$V_a^b(g_n)\leqslant L。\qquad (67)$$

設 $g_n(x)$ 在区間 $[a, b]$ 的每点趋向于極限函数 $g(x)$；而这極限函数是有有穷值的。不难看出，函数 $g(x)$ 是囿变函数。事实上，对于函数 $g_n(x)$ 和 $t_\delta^{(n)}$ 满足

$$t_\delta^{(n)}=\sum_{k=1}^{m}|g_n(x_k)-g_n(x_{k-1})|\leqslant L,$$

由此，取極限，可得函数 $g(x)$ 的和 t_δ 满足

$$t_\delta=\sum_{k=1}^{m}|g(x_k)-g(x_{k-1})|\leqslant L,$$

由此可知 $g(x)$ 的变分也不大于 L。如果函数 $g_n(x)$ 不是在区間 $[a, b]$ 上一切点处趋向于函数 $g(x)$，而只是在到处稠密的点 $x_k(k=1, 2, 3, \cdots)$ 所組成的集合 $\mathscr{E}$ 上，那末已經不能断定函数 $g(x)$ 是囿变函数了①。以后，在所說的情形下，我們将設函数 $g(x)$ 是囿变函数。注意所謂点 x_k 所組成的集合 $\mathscr{E}$ 在 $[a, b]$ 内到处稠密，是指区間 $[a, b]$ 的任意部分区間都包含属于 $\mathscr{E}$ 的无穷个点。設 $g_n(x)$ 是增函数序列，而这序列在 $[a, b]$ 的每一点收斂于極限函数 $g(x)$，后者的值都是有穷的。如此則極限函数也是增的，所以是囿变函数。現在証明下面的定理：

定理 1. 如果区間 $[a, b]$ 上的增函数 $g_n(x)$ 在到处稠密的点集合 $\mathscr{E}$ 上收斂于函数 $g(x)$，那末 $g_n(x)$ 在 $[a, b]$ 内部每个 $g(x)$ 的連續点处也都收斂于 $g(x)$。

設 x_0 是 $g(x)$ 的連續点，而 x' 与 x'' 是集合 $\mathscr{E}$ 中的点，各在 x_0 之左与右，就是說 $x'<x_0<x''$。那末 $g_n(x')\leqslant g_n(x_0)\leqslant g_n(x'')$，所以

$$g(x_0)-g_n(x'')\leqslant g(x_0)-g_n(x_0)\leqslant g(x_0)-g_n(x')。$$

这不等式可以改成下面形式：

$$[g(x_0)-g(x'')]+[g(x'')-g_n(x'')]\leqslant g(x_0)-g_n(x_0)\leqslant$$
$$\leqslant[g(x_0)-g(x')]+[g(x')-g_n(x')]。\qquad (68)$$

設 ε 是預定的正数。点 x' 与 x'' 是取自集合 $\mathscr{E}$ 的，而后者在 $[a, b]$ 中到处稠密，所以可以取 x' 与 x'' 离 x_0 足够近，使 $|g(x_0)-g(x'')|<\varepsilon$，$|g(x_0)-$

① 譯者注：例如設 $a=0$，$b=1$，所論到处稠密的可数集合 E 是有理点集合，而 $g_n(x)=1$，$g(x)$ 是 E 的特征函数，那末 $g_n(x)$ 在 E 上 $\to g(x)$，而 $g_n(x)$ 的变分都是零，但 $g(x)$ 不是囿变函数。

$-g(x')|<\varepsilon$，因为 x_0 是 $g(x)$ 的連續点。如此固定了 x' 与 x''，那末对于一切足够大的 n，不等式 $|g(x')-g_n(x')|<\varepsilon$ 与 $|g(x'')-g_n(x'')|<\varepsilon$ 成立，因为在点 x' 及 x'' 处 $g_n(x)$ 收斂于 $g(x)$。由这些不等式与不等式(68)可直接得下面的不等式：

$$-2\varepsilon\leqslant g(x_0)-g_n(x_0)\leqslant+2\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，可知 $g_n(x_0)\to g(x_0)$。現在陈述关于取極限值的基本定理。

定理 2 (黑利)．設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續的，$g_n(x)$ 是囿变的，其变分 $V_a^b(g_n)$ 不大于某数 L，而 L 与 n 无关，并且在 $[a,b]$ 的一切点处，$g_n(x)\to g(x)$。如此則下面公式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x)。\tag{69}$$

上面已指出，函数 $g(x)$ 是囿变函数，所以 $f(x)$ 依 $g(x)$ 是可积分的。分割区間 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$ 成部分，并写出显然的公式：

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dg(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]dg(x)+\sum_{k=1}^m f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}dg(x),$$

就是說

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]dg(x)+\sum_{k=1}^m f(x_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]。\tag{70}$$

設 ε 是預定的正数。可以取定某一細分 $[a,b]$ 为部分的分割，使对于任意的 k，$|f(x)-f(x_k)|\leqslant\varepsilon$。这是直接由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的一致連續性而推出的。由此得

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]dg(x)\right|\leqslant\varepsilon V_{x_{k-1}}^{x_k}(g),$$

所以
$$\left|\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]dg(x)\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^m V_{x_{k-1}}^{x_k}(g),$$

就是說
$$\left|\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]dg(x)\right|\leqslant\varepsilon V_a^b(g)\leqslant\varepsilon L。$$

公式(70)可以依上面所取定的分割写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\theta\varepsilon L+\sum_{k=1}^{m}f(x_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

而$|\theta|\leqslant 1$。用同样推理法可得

$$\int_a^b f(x)dg_n(x)=\theta_n\varepsilon L+\sum_{k=1}^{m}f(x_k)[g_n(x_k)-g_n(x_{k-1})],$$

而$|\theta_n|\leqslant 1$。逐项相减，得

$$\int_a^b f(x)dg(x)-\int_a^b f(x)dg_n(x)=$$

$$=(\theta-\theta_n)\varepsilon L+\sum_{k=1}^{m}f(x_k)\{[g(x_k)-g_n(x_k)]-$$

$$-[g(x_{k-1})-g_n(x_{k-1})]\}。$$

点x_k已經取定，由于$g_n(x)$在这些点处收斂于$g(x)$，对于一切足够大的n，上面公式中的和依絕对値小于ε。如此，依上式，对于足够大的n，

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)-\int_a^b f(x)dg_n(x)\right|\leqslant\varepsilon(2L+1),$$

旣然ε是任意的，可得(69)。

注　設$g_n(x)$并不是在$[a,b]$中到处收斂于$g(x)$，而只是在到处稠密的点集合上收斂，并且設区間的两端也在这集合里，又設極限函数$g(x)$是囿变函数。如此則如果分割点x_k取成屬于这集合的点，以使$g_n(x)\to g(x)$，那末前面的証明依然有效，而与以前一样可得公式(69)。現在推广証明了的定理，与在[11]中的推广类似。

定理 3.　設$f(x)$在区間$[-\infty,+\infty]$內部連續，并且有界，$g_n(x)$及$g(x)$都是$[-\infty,+\infty]$上的增函数，并在这区間的两端連續，$g_n(x)\to g(x)$在$[-\infty,+\infty]$內到处稠密的点集合上成立，特別在区間的两端上也成立。如此則下面公式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dg_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dg(x)。\tag{71}$$

注意在这情形下，$g_n(x)$的全变分等于$g_n(+\infty)-g_n(-\infty)$，而由定理的条件，直接可知这些全变分都不大于定数$L$，而$L$是与$n$无关的。$f(x)$依$g_n(x)$与$g(x)$的积分存在。为了估計这两积分的差，把积分区間分割成三部分：$[-\infty,a]$，$[a,b]$，$[b,+\infty]$，而a，b是屬于使$g_n(x)\to g(x)$的点所組成的集合：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dg(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dg_n(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{-\infty}^{a}-\int_{-\infty}^{a}\right|+\left|\int_{a}^{b}-\int_{a}^{b}\right|+\left|\int_{b}^{+\infty}-\int_{b}^{+\infty}\right|。\qquad(72)$$

函数 $f(x)$ 是有界的，就是說 $|f(x)|\leqslant L$。对于第一差值，

$$\left|\int_{-\infty}^{a}f(x)dg(x)-\int_{-\infty}^{a}f(x)dg_n(x)\right|\leqslant L\{[g(a)-g(-\infty)]+$$

$$+[g_n(a)-g_n(-\infty)]\},$$

我們可以写成下式：

$$\left|\int_{-\infty}^{a}-\int_{-\infty}^{a}\right|\leqslant L\{2[g(a)-g(-\infty)]+[g_n(a)-g(a)]+[g(-\infty)-g_n(-\infty)]\}。$$

由于 $g(x)$ 在 $x=-\infty$ 处的連續性，可以选定足够近于 $(-\infty)$ 的 a，使正差值 $g(a)-g(-\infty)$ 小于任意預定的正数。如此固定了 a，再留意当 n 足够大时，差值 $g_n(a)-g(a)$ 与 $g(-\infty)-g_n(-\infty)$ 的絕对值也可以成为任意小。完全同样地可以处理公式 (72) 右边的第三項。如此，对于任意預定的正数 ε，可以选定上述那在 $[-\infty,+\infty]$ 上到处稠密的集合中的点 a 与 b，使公式 (72) 右边的第一与第三項对于一切足够大的 n 都小于 ε。在有穷区間 $[a,b]$ 可以引用上面証明了的定理，就是說 (72) 右边第二項对于一切足够大的 n 都小于 ε。如此 (72) 的不等式的左边对于一切足够大的 n 小于 3ε；由此，因为 ε 是任意的，可得公式 (71)。

現在陈述定理 2 的第二推广，而这是关于广义斯提勒杰斯积分的。

定理 4：設 $f(x)$ 在区間 $[-\infty,+\infty]$ 內連續，$g_n(x)$ 与 $g(x)$ 是在这区間上囿变的，并且 $g_n(x)$ 的变分不超过某一与 n 无关的数。又設 $g_n(x)\to g(x)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 内一到处稠密的集合上成立，而广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dg_n(x)=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b}f(x)dg_n(x)。$$

对于 n 是一致收斂的。那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 上可积分，而公式 (71) 成立。

設 ε 是預定的正数。存在一正数 A，使对于任意位于 $[-A,+A]$ 外的区間 $[B',B'']$，

$$\left|\int_{B'}^{B''}f(x)dg_n(x)\right|\leqslant\varepsilon。\qquad(73)$$

固定了任意的如此区間$[B', B'']$，并写出显然的不等式：

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dg(x)\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} f(x)dg_n(x)\right| + \left|\int_{B'}^{B''} f(x)dg(x) - \int_{B'}^{B''} f(x)dg_n(x)\right|。$$

依定理4，可以取大数n，使右边第二項小于ε。如此由(73)可以立刻推得

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dg(x)\right| \leqslant 2\varepsilon。$$

因为ε是任意的，这不等式証明了$f(x)$在$[-\infty, +\infty]$上依$g(x)$的积分存在。公式(71)也可以与上面一样地把区間$[-\infty, +\infty]$分成三部分而得到証明。

13. 选取原理 設有一实数的无穷集合，并設其中諸数的絕对值不超过某一确定的正数。我們知道，如此則从这数集中任意无穷序列a_n可以选取部分序列a_{n_k}，而后者趋向于極限[II, 89]。同样对于所給集合的任意部分可以作同样結論。这命題可以叫做对于依絕对值有界的实数集合的选取原理。同样的选取原理对于依絕对值有界的复数集合也成立。为了証明这点，只須把选取原理分別地应用于实数与虛数部分上去。选取原理在某些条件之下也可以应用于某些函数的集合。我們將陈述两种这样的选取原理。其中一个是关于某种囿变函数的集合的，另一个是关于連續函数的集合的。首先把第一个选取原理陈述成下列定理：

定理1（黑利）. 設$\mathscr{E}$是一集合，其中的元是区間$[a, b]$（有穷或无穷）上的囿变函数$\{g(x)\}$，并且存在一正数L，使凡屬于这集合$\mathscr{E}$的函数$g(x)$都滿足下列不等式：

$$|g(x)| \leqslant L; \quad V_a^b(g) \leqslant L, \tag{74}$$

就是說，函数$g(x)$依絕对值是有界的，而它們在$[a, b]$上的变分也以某一定数为界。如此則从集合$\mathscr{E}$中的任意无穷函数序列$g_n(x)$里可以选取一部分序列，使在$[a, b]$的一切点处趋向于某一囿变函数$g(x)$。

只須証明可以取出部分序列$g_{n_k}(x)$，使在一切点处这部分序列趋向于極限函数。如此，依定理中的条件，并依[12]中所述的，直接得知極限函数也是囿变函数。首先証明两个輔助定理。

輔助定理1. 如果有一函数序列$f_n(x)$，其中每一函数是定义于$[a, b]$上，并依絕对值是以同一数L为界的，那末由这序列可以选取出一部分函数序列，使这部分序列在屬于$[a, b]$并預先給定的可数多个点$x_k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$处收斂。

依定理中的条件，一切数$f_n(x_1)$依絕对值是为数L所界的。所以可以选

取一部分序列

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x),\ f_3^{(1)}(x),\ \cdots, \tag{75}$$

使这部分序列在点 $x=x_1$ 处收斂。如果在(75)的函数中令 $x=x_2$，那末得数的序列 $f_k^{(1)}(x_2)$，依絕对值以 L 为界。因此由(75)中的函数序列可以选取出一部分序列

$$f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ f_3^{(2)}(x),\ \cdots, \tag{76}$$

使这部分序列在 $x=x_2$ 处也收斂。这序列既是(75)中序列的部分序列，当然在 $x=x_1$ 处也收斂。令 $x=x_3$，則 $f_k^{(2)}(x_3)$ 依絕对值也 $\leqslant L$，所以从(76)的序列中可以选取一新部分序列

$$f_1^{(3)}(x),\ f_2^{(3)}(x),\ f_3^{(3)}(x),\ \cdots, \tag{77}$$

使它在 $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$ 三点处都收斂。繼續如此作法，可得序列

$$f_1^{(m)}(x),\ f_2^{(m)}(x),\ f_3^{(m)}(x),\ \cdots (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \tag{78}$$

这序列在点 $x=x_1$, $x=x_2$, $\cdots$, $x=x_m$ 处都收斂。由(75)取第一函数，由(76)取第二函数，…，一般地由(78)取第 m 个函数，而得新序列：

$$f^{(1)}(x)=f_1^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x)=f_2^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x)=f_3^{(3)}(x),\ \cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=f_n^{(n)}(x),\ \cdots。 \tag{79}$$

現在証明这序列在任意点 $x=x_k$ 处都收斂。事实上，取点 $x=x_k$。(79)中从第 $m=k$ 項以后的函数，就是說，函数

$$f^{(k)}(x)=f_k^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x)=f_{k+1}^{(k+1)}(x),\ \cdots, \tag{80}$$

依上面的作法乃是在(78)中令 $m=k$ 所得函数序列的部分序列，所以在(80)中令 $x=x_k$ 时可得收斂的数序列，就是說函数序列(80)在 $x=x_k$ 处收斂。如此可知(79)就是所要找的部分序列，而輔助定理証明了。

在証明这輔助定理时，求在一切点 $x=x_k$ 处收斂的函数序列的方法叫做对角綫方法。这并不是一个构造的方法，只具有純理論的价值而已。

輔助定理 2. 如果有一函数序列 $h_n(x)$，其中每个函数在区間 $[a,\ b]$ 上是增函数，并依絕对值以同一数 L 为界，那末从这序列中可以选取一部分序列，使这部分序列在 $[a,\ b]$ 中一切点处收斂。

取 $[a,\ b]$ 区間的左端 $x=a$，并取 $[a,\ b]$ 中横坐标为有理数的一切点，而作成 $[a,\ b]$ 中的一个可数集合 $\{x_k\}$。

这集合在 $[a,\ b]$ 中是到处稠密的。依輔助定理 1，可以取序列 $h_n(x)$ 的一个部分序列 $h_{n_k}(x)$，使后者在一切点 x_k 处收斂。如此有一極限函数，只定义于諸点 x_k 处。依照下述方式把它扩展到区間 $[a,\ b]$ 的其他点处。如果 x 是

区間$[a, b]$的一点，而x不与任何x_k相同，可以令$h(x)$等于在一切位于x点左边的x_k点处的$h(x)$值的上确界：

$$h(x)=\sup_{x_k<x} h(x_k)。$$

如此定义的函数$h(x)$显然是在$[a, b]$的有界增函数。它只能有有穷多或可数无穷多个間断点：$\xi_1, \xi_2, \cdots$。在一切点x_k处，序列$h_{n_k}(x)$趋向于$h(x)$，而x_k組成$[a, b]$中的一个到处稠密的集合。依[12]中的定理1，$h_{n_k}(x)$必在$[a, b]$內$h(x)$的一切連續点处收斂于$h(x)$。如此$h_{n_k}(x)$不收斂于$h(x)$只在函数$h(x)$的間断点ξ_i处以及区間的右端才可能。再对于序列$h_{n_k}(x)$依輔助定理1选取部分序列，可使后者在一切点处收斂，于是証明了輔助定理2。

現在不难証明基本定理1。凡屬于集合$\mathscr{E}$的囿变函数$g(x)$可以表成两个增函数的差：

$$g(x)=\frac{1}{2}[V_a^x(g)+g(x)]-\frac{1}{2}[V_a^x(g)-g(x)], \tag{81}$$

而依(74)，这两增函数依絕对值都不超过数L。引用輔助定理2，可知由序列$g_n(x)$可以选取一部分序列，使其相应的(81)式右边被减項在$[a, b]$的一切点处收斂于極限函数。再引用一次輔助定理2可知由剛才所得的序列中又可选取一部分序列，使与它相应的(81)式右边的减数也在$[a, b]$中的一切点处收斂于極限函数。如此得出了部分序列$g_{n_k}(x)$，后者在$[a, b]$的一切点处收斂于極限函数，而定理証明了。

14. 选取原理(續) 設$f(x)$是有穷区間$[a, b]$上的連續函数。我們知道它在这区間上也是一致連續的，就是說，对于任意預定的正数ε，必存在一个正数η，使凡在$[a, b]$中且滿足$|x'-x''|\leqslant\eta$的点x'与x''也必滿足不等式$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$。对于在$[a, b]$上連續的不同函数，当$\varepsilon$一定时，其相应的$\eta$一般說来是不同的。函数$f(x)$变化得愈快，相应的$\eta$愈小。例如对于函数$f_n(x)=\sin nx$，数$\eta$与$n$相关，而当$n$无穷地增大时，数$\eta$趋近于零。所謂在$[a, b]$上連續的函数$f(x)$的集合是在$[a, b]$上等度連續的函数集合，是指对于任意預定的正数$\varepsilon$，存在一个正数$\eta$，使对于一切屬于上述集合的函数$f(x)$，只要是$x', x''$屬于$[a, b]$，且$|x'-x''|\leqslant\eta$，那末必然$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$。

如果有一函数集合，其中函数是等度連續的，并且依絕对值为同一数所界，那末可以証明对于这集合选取原理也成立，而在这情形中的收斂乃是指在$[a, b]$上的一致收斂而言，就是說，下列定理成立：

定理2. 如果$\mathscr{E}$是在有穷区間$[a, b]$上等度連續的函数集合$\{f(x)\}$，而

凡屬于 $\mathscr{E}$ 的函数依絕对值以同一数 L 为界(就是說 $|f(x)|\leqslant L$)，那末由屬于 $\mathscr{E}$ 的任意函数序列可以选取一个在 $[a, b]$ 上一致收斂的部分序列[①]。

設有一屬于 $\mathscr{E}$ 的函数序列。应用輔助定理 1，可知由这序列可以选取出一部分序列来，使后者在一切 x_k 点处收斂于一極限，而 $\{x_k\}$ 是在 $[a, b]$ 上到处稠密的可数点集合。例如可以取这集合为屬于 $[a, b]$ 而具有有理数横坐标的点集合。設

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots \tag{82}$$

就是如此由所給屬于 $\mathscr{E}$ 的函数序列选取出来的。在一切 $x_k(k=1, 2, 3, \cdots)$ 点处收斂的部分序列。現在証明序列 (82) 在区間 $[a, b]$ 上一致收斂。作差 $f_p(x)-f_q(x)$，并把它表成

$$f_p(x)-f_q(x)=[f_p(x)-f_p(x')]+[f_p(x')-f_q(x')]+[f_q(x')-f_q(x)] \tag{83}$$

的形式，而 x' 是上述的那个在 $[a, b]$ 上到处稠密的点集合中的一点。設 ε 是預定的正数，而 η 是在等度連續性定义中那与 ε 相应的数。取由点 x_k 組成的一个有穷集合，使这集合 τ' 中的点把 $[a, b]$ 区間分成部分区間，后者中各个的長都 $\leqslant\eta$。这显然是可能的，因为 x_k 諸点組成在 $[a, b]$ 上到处稠密的集合。在一切屬于有穷集合 τ' 中的点处序列(82)有極限。因此存在一个数 N，使

$$\text{当 } p \text{ 与 } q>N \text{ 时，必然 } |f_p(x')-f_q(x')|<\varepsilon, \tag{84}$$

而 x' 是上述有穷集合 τ' 中的任意点。現在令(83)中的点 x' 是那有穷点集合 τ' 中的一点，并写出不等式

$$|f_p(x)-f_q(x)|\leqslant|f_p(x)-f_p(x')|+|f_p(x')-f_q(x')|+|f_q(x')-f_q(x)|, \tag{85}$$

这由(83)可以立刻推出。对于 $[a, b]$ 中的任意 x，可以取 τ' 中的 x'，使对于一切 n，$|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$。这 x' 乃是包含 x 点那部分区間的一个端点。此外，如果 p 与 $q>N$，則 (84) 式对于一切屬于 τ' 的点 x' 都成立。如此，依 (85) 可知：对于任意預定的正数 ε，必存在一与 x 无关的数 N，使对于一切大于 N 的数 p 及 q，一切屬于 $[a, b]$ 的 x，$|f_p(x)-f_q(x)|<3\varepsilon$。但这乃是說，(82) 中的序列在全区間 $[a, b]$ 上一致收斂，于是定理証明了。

15. 連續函数的空間 考察一切在已知有穷区間 $[a, b]$ 上的連續函数，

---

① **譯者注：** 这定理通常叫做阿尔且拉-阿斯科利定理，其逆定理也成立，讀者可参照 И. П. 那湯松的实变数函数論第十六章。

为簡便起見，把它們所組成的集合叫做空間 C。这空間中的元，叫做空間的矢量，乃是任意定义于 $[a, b]$ 上的連續函数。不同的連續函数代表这空間 C 的不同元，而在 $[a, b]$ 上恒等于零的函数叫做空間 C 的零元。我們只考察实数值函数。如果取有穷多个在 $[a, b]$ 上連續的函数，以实数系数作它們的綫性組合式 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$，那末仍得一个在 $[a, b]$ 上連續的实値函数，这就是說，空間 C 中的元可以用实数来乘，并可以相加，而所得仍是 C 中的元。这些运算遵守初等代数学中的通常定律，如

$$\begin{aligned}&f_1(x)+f_2(x)=f_2(x)+f_1(x); \quad c[f_1(x)+f_2(x)]=cf_1(x)+cf_2(x);\\&(c_1+c_2)f(x)=c_1f(x)+c_2f(x); \quad c_1(c_2f(x))=(c_1c_2)f(x).\end{aligned} \tag{86}$$

現在把元的范数观念介紹到空間 C 里来，换句話說，引进空間 C 中矢量長度的概念。所謂元 $f(x)$ 的范数，是指 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上所取的最大值。零元的范数是零，但任意其他元的范数是正数。用記号 $\|f\|$ 表示函数 $f(x)$ 的范数。再把收斂的概念引入空間 C 来。所謂 C 中元的序列 $f_n(x)$ 收斂于 C 中的元 $f(x)$，是指 $\|f(x)-f_n(x)\|\to 0$。就是說，$|f(x)-f_n(x)|$ 在区間 $[a, b]$ 上的最大値趋向于零，这显然等于說，$f_n(x)\to f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂。

現在引入空間 C 的泛函与运算子的概念。C 中的泛函是指任意一个对 C 中每一元 $f(x)$ 各配以一个确定实数的确定規律而言。对于泛函通常引用下面的表示法：$\Phi[f(x)]$，$\Psi[f(x)]$ 等等。泛函概念是通常函数概念的变体。在泛函的情形中主变元是 C 中的元，而泛函的値乃是实数。泛函叫做分配的，是指对于 C 中的任意有穷綫性組合式 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$，它滿足等式

$$\Phi[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)]=\\=c_1\Phi[f_1(x)]+c_2\Phi[f_2(x)]+\cdots+c_m\Phi[f_m(x)]. \tag{87}$$

$\Phi[f(x)]$，叫做有界的，是指有一正数 N 存在，使凡 C 中的元 $f(x)$ 都滿足不等式

$$|\Phi[f(x)]|\leqslant N\|f(x)\|. \tag{88}$$

这不等式的左边乃是实数 $\Phi[f(x)]$ 的絕对值，但后者表在 C 中的泛函对应于元 $f(x)$ 的值，而右边乃是正数 N 与元 $f(x)$ 的范数的乘积，也就是 N 与 $|f(x)|$ 在区間 $[a, b]$ 上最大値的乘积。分配而又有界的泛函叫做綫性泛函①。还

① 譯者注：这是依波兰学派的用法，而有些作者則用綫性泛函表此处的分配泛函。

可以引入連續泛函的概念。就是說，泛函 $\Phi[f(x)]$ 叫做連續的，是指它滿足下面的条件：如果 $f_n(x)\to f(x)$，而这收斂在 $[a, b]$ 上是一致的，那末 $\Phi[f_n(x)]\to\Phi[f(x)]$。不难看出，綫性泛函必是連續的。事实上，引用(87)及(88)，可以得

$$|\Phi[f(x)]-\Phi[f_n(x)]|=|\Phi[f(x)-f_n(x)]|\leqslant N\|f(x)-f_n(x)\|。$$

由于 $f_n(x)$ 一致收斂于 $f(x)$，可知 $\|f(x)-f_n(x)\|\to 0$，所以 $\Phi[f(x)]-\Phi[f_n(x)]\to 0$，就是說确实有 $\Phi[f_n(x)]\to\Phi[f(x)]$。在定义綫性泛函时也可以先設分配性与連續性，然后再証明其有界性，这就是說，在假設分配性之下，有界性与連續性对于泛函是同效的。我們不陈述这一事实的証明，因为这毫无困难。

举几个泛函的例。設 x_0 是区間 $[a, b]$ 上的某一定点。連續函数在这一点的值 $f(x_0)$ 就是在 C 中的一个綫性泛函。定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

也是一个綫性泛函。設 $g(x)$ 是在 $[a, b]$ 上囿变的函数。对于 C 中的一切元 $f(x)$，可以作斯提勒杰斯积分

$$\Phi[f(x)]=\int_a^b f(x)\,dg(x)。\tag{89}$$

这也是一个綫性泛函 $\Phi[f(x)]$。其分配性可以由积分对于 $f(x)$ 的分配性得出，而其有界性可以由

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right|\leqslant LV_a^b(g)$$

得出，其中 L 表示 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 区間上的最大值。如此对于泛函(89)，(88)式中数 N 的任务可以由全变分 $V_a^b(g)$ 来担任。下面将証明一个重要定理，就是說 C 中的一切泛函可以表示成积分形状(89)，而其中 $g(x)$ 是囿变函数。

定理(F. 黎斯) 空間 C 中的一切綫性泛函可以表示成(89)式中的形状，其中 $g(x)$ 是囿变函数。

証明这定理时可以应用最初由院士 C. H. 別尔恩斯坦所作的一种特殊形状的多項式。以前曾論到过这种多項式，現在重提一下它的作法及基本性質。設 $f(x)$ 是区間 $[0, 1]$ 上的一个連續函数。与这函数相应的别尔恩斯坦多項式是

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \quad \left(C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\right)。\tag{90}$$

以前曾証明过[II; 154]，无限地增加 n 时多項式序列 $P_n(x)$ 在区間[0, 1]上一致收斂于函数 $f(x)$。在証明本定理时，先把区間 $[a, b]$ 用主变数的綫性代换映像于区間[0, 1]上：令 $y=(x-a):(b-a)$。如此則在 $[a, b]$ 上連續函数的空間变换成了在 [0, 1] 上連續函数的空間，而証明时我們可以設基本区間 $[a, b]$ 已經就是[0, 1]了。設 $\Phi[f(x)]$ 是空間 C 中的某一泛函。我們要証明，它可以表示成(89)的形式，其中 $g(x)$ 是区間[0, 1]上的某一囿变函数。显然

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}=1,$$

而如果令 $x\in[0, 1]$，上写的和中一切項都是非負的。由此可知，如果 ε_m 是等于 $+1$ 或 -1 的数，

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\right| \leqslant 1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)。\tag{91}$$

把泛函 $\Phi[f(x)]$ 作用于位于不等式(91)左边的多項式，依(88)及(91)可得

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \Phi\left[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\right]\right| \leqslant N。\tag{92}$$

現在选取符号 ε_m，使积 $\varepsilon_m \Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}]$ 对于一切 m 都是非負的；如此选定了 ε_m，不等式(92)可以写成形式

$$\sum_{m=0}^{n} \left|\Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}]\right| \leqslant N。\tag{93}$$

把区間[0, 1]分成 n 等分，并定义函数 $g_n(x)$，使它在每个部分区間上取常数值，并規定如下：

$$\left.\begin{aligned}
&g_n(0)=0,\\
&g_n(x)=\Phi[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}], \quad 0<x<\frac{1}{n};\\
&g_n(x)=\Phi[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}]+\Phi[C_n^1 x (1-x)^{n-1}], \quad \frac{1}{n}\leqslant x<\frac{2}{n};\\
&g_n(x)=\sum_{m=0}^{2}\Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}], \quad \frac{2}{n}\leqslant x<\frac{3}{n};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g_n(x)=\sum_{m=0}^{n-1}\Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}], \quad \frac{n-1}{n}\leqslant x<1;\\
&g_n(1)=\sum_{m=0}^{n}\Phi[C_n^m x^m (1-x)^{n-m}], \quad x=1。
\end{aligned}\right\}\tag{94}$$

$g_n(x)$的全变分显然等于 $g_n(x)$在各分割点与区間端点处跃度絕对值的和。依(93)，可知 $V_0^1(g_n)\leqslant N$。又依(93)并由函数 $g_n(x)$ 的定义可直接推知 $|g_n(x)|\leqslant N$。如此，对于函数序列 $g_n(x)$ 可以应用[13]的定理1，从而得知存在正整数 n_k 所組成的增序列，使 $g_{n_k}(x)$在[0, 1]的一切点处趋向于某一囿变函数 $g(x)$。現在証明这函数 $g(x)$ 是(89)中所需的那函数。作$f(x)$依 $g_n(x)$的斯提勃杰斯积分。这等于函数 $f(x)$ 在 $g_n(x)$ 各間断点的值与在这些点处 $g_n(x)$的跃度的乘积的和：

$$\int_0^1 f(x)\,dg_n(x)=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)\Phi[C_n^m x^m(1-x)^{n-m}]。$$

依公式(87)与(90)，右边乃是 $\Phi[f(x)]$对于 $f(x)=P_n(x)$的数值，所以

$$\int_0^1 f(x)\,dg_n(x)=\Phi[P_n(x)]。$$

应用这公式于 $n=n_k$，则

$$\int_0^1 f(x)\,dg_{n_k}(x)=\Phi[P_{n_k}(x)]。\tag{95}$$

无限地增加 n_k，则 $P_{n_k}(x)\to f(x)$在[0, 1]上一致收斂，依泛函 $\Phi[f(x)]$的連續性，由公式(95)可知

$$\Phi[f(x)]=\lim_{n_k\to\infty}\int_0^1 f(x)\,dg_{n_k}(x)。$$

对于右边引用[12]的定理2，可得

$$\Phi[f(x)]=\int_0^1 f(x)\,dg(x)。\tag{96}$$

16. C 中的綫性运算子 現在講空間 C 中运算子的定义。所謂C上的运算子是指凡对 C 中任意元 $f(x)$各配以 C 中一个确定元 $\varphi(x)$ 的确定規律。把运算子表示成 $F[f(x)]$。对于 C 中任意的函数 $f(x)$，記号 $F[f(x)]$ 决定C中一个函数 $\varphi(x)$。运算子的分配性也与泛函的分配性一样地定义，如公式(87)所示。有界性可由与(88)式相似的公式定义，但左边的絕对值必須改成范数，因为 $F[f(x)]$并不是数；而是 C 中的元：

$$\|F[f(x)]\|\leqslant N\|f(x)\|。\tag{88$_1$}$$

既分配又有界的运算子叫做綫性运算子。如此的运算子是連續的，这是指：如果 $f_n(x)\to f(x)$，那末 $F[f_n(x)]\to F[f(x)]$，而在这两式中的收斂都是指在[a, b]上相应函数序列一致收斂。

現在举出关于 C 中綫性运算子的一般形式的基本結果，但不加証明。設

$g(x, y)$是在二維閉区間 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ 上定义的函数，而它对于区間$[0, 1]$内的任意值 y 都是 x 在 $[0, 1]$ 中的囿变函数。把函数 $g(x, y)$放到公式(96)中右边去，积分的結果不是数，而是参数 y 的一个函数，后者定义于区間$[0, 1]$上:

$$\varphi(y)=\int_0^1 f(x) d g(x, y). \tag{97}$$

要使上写的公式表示綫性运算子，必須且只須函数 $g(x, y)$ 除了具有上述的屬性之外，还須能使对于无論如何选取的在 $[0, 1]$ 上連續的函数 $f(x)$，由公式(97)定义的函数 $\varphi(x)$ 也是区間$[0, 1]$上連續的函数。如果 y_0 是区間$[0,1]$中的某一点，而 $y_n(n=1, 2, \cdots)$ 是区間$[0, 1]$中的一个序列，并且这序列以 y_0 为極限，那末由 $\varphi(y)$ 在 y_0 点的連續性定义可得函数 $g(x, y)$ 所須滿足的必要条件：即对于区間 $[0, 1]$ 中的任意点 y_0，以及这区間上的任意連續函数 $f(x)$，下面公式必成立:

$$\lim_{y_n \to y_0} \int_0^1 f(x) d_x g(x, y_n)=\int_0^1 f(x) d_x g(x, y_0), \tag{98}$$

而 y_n 是区間 $[0, 1]$ 內的任意趋向于 y_0 的序列。有这样性質的函数 $g(x, y)$ 通常称做依参数弱連續的。如果 $g(x, y)$ 依 x 是囿变的，依 y 是弱連續的，那末公式(98)显然定出 C 中的一个綫性运算子。也可以証明逆命題，即凡 C 中的綫性运算子必可以表成(98)的形式，而 $g(x, y)$ 是依 x 囿变的，依 y 是弱連續的。关于这定理的証明与弱連續性概念，可以参考格利汶科“斯提勒杰斯积分”一書。

如果函数$K(x, y)$在二維区間 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ 上連續，那末公式

$$\varphi(y)=\int_0^1 K(y, x) f(x) d x \tag{99}$$

显然是 C 中的綫性运算子。在积分方程中所遇到的就是这种运算子。但并非凡 C 中的运算子都可以表示成(99)的形式。

我們曾定义空間 C 中元$f(x)$ 的范数等于$|f(x)|$在基本区間 $[0, 1]$ 中的最大值。由这样的范数定义可知所謂元 $f_n(x)$ 趋向于元 $f(x)$，是指函数 $f_n(x)$ 在基本区間上一致收斂于 $f(x)$。

定义 所謂 C 中的元集合$\{\varphi(x)\}$是列緊的，是指由屬于这集合的任意序列，可以取出一部分序列来，使这部分序列在空間 C 中收斂于一極限。換句話說，如果从屬于集合$\{\varphi(x)\}$的任意序列可以取出一个在基本区間上一致收

數的部分序列来，那末这集合$\{\varphi(x)\}$叫做列緊的。

依[14]中的定理可知函数集合的有界性与等度連續性是列緊性的充分條件。不难証明，上述条件对于列緊性也是必要的。以后并不使用这命題，所以現在不叙述其証明。

只設函数集合的有界性不能保証其列緊性。例如不难証明函数 $\sin nx$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$的集合不是列緊的，虽然所有这些函数依絕对值都不超过 1。

回到具有連續核的綫性运算子(99)。設有任意有界元集合$\{f(x)\}$，就是說对于这集合中的任意元，下面不等式成立：

$$|f(x)|\leqslant L, \tag{100}$$

而 L 是确定的正数。对于"像函数"$\varphi(x)$，

$$|\varphi(y')-\varphi(y'')|\leqslant\int_0^1|K(y', x)-K(y'', x)||f(x)|dx, \tag{101}$$

而依(100)，

$$|\varphi(y')-\varphi(y'')|\leqslant L\int_0^1|K(y', x)-K(y'', x)|dx.$$

由于 $K(y, x)$的連續性，对于任意預定的正数 ε，存在一个正数 η，不随函数 $f(x)$而变动，使当$|y'-y''|\leqslant\eta$时必然有$|K(y', x)-K(y'', x)|\leqslant\varepsilon$，如此則

$$\text{当 } |y'-y''|\leqslant\eta \text{ 时} \quad |\varphi(y')-\varphi(y'')|\leqslant\varepsilon L,$$

而 η 与 $\varphi(y)$的选擇无关，所以像函数集合是等度連續的函数集合。

像函数的有界性可由下面不等式看出：

$$|\varphi(y)|\leqslant\int_0^1|K(y, x)||f(x)|dx\leqslant L\int_0^1|K(y, x)|dx.$$

如此具有連續核的綫性运算子(99)把任一有界集合$\{f(x)\}$映像成列緊集合$\{\varphi(x)\}$。

凡把有界的元集合映像成列緊集合的运算子通常叫做全連續运算子。

应用舒伐尔茲不等式于(101)式右边的积分上去，則

$$|\varphi(y')-\varphi(y'')|^2\leqslant\int_0^1|K(y', x)-K(y'', x)|^2dx\int_0^1|f(x)|^2dx. \tag{102}$$

由此显然不用條件(100)而仅設集合$\{f(x)\}$滿足較弱的，依中值有界的條件：

$$\int_0^1|f(x)|^2dx\leqslant L$$

也可以保証上述的結果。

如此则像集合仍是列紧的。由(102)可知，关于核，也可以不設連續性，而作下面的假設：

$$\int_0^1 |K(y, x)|^2 dx \leqslant L,$$

而对于任意預定的正数 ε，存在一个正数 η，使

$$\text{当 } |y'-y''| \leqslant \eta \text{ 时必然 } \int_0^1 |K(y', x) - K(y'', x)|^2 dx \leqslant \varepsilon。$$

17. 区間函数　为了以后推广积分概念，应用区間函数以替代点函数更适合些。設在无穷軸上有一不减的有界函数 $g(x)$。对于任一半开区間 $\varDelta=(\alpha, \beta]$ 使一非負的数 $g(\beta+0)-g(\alpha+0)$ 与它相应(这表示这区間上所負荷的質量)。如此得出一个半开区間的函数，以 $G(\varDelta)$ 表示：

$$G(\varDelta)=g(\beta+0)-g(\alpha+0)。\tag{103}$$

为了陈述这函数的性質，可以引入一个新概念。我們說，半开区間 $\varDelta^{(1)}, \varDelta^{(2)}, \cdots$ 所成的序列是零序列，是指每一区間 $\varDelta^{(k+1)}$ 属于它前边的那个 $\varDelta^{(k)}$，并且这些区間全体公有的点不存在。现在研究一下零区間序列的結构。設 $\varDelta^{(k)}$ 是 $(a_k, b_k]$。依条件，$a_k \leqslant a_{k+1}$，$b_k \geqslant b_{k+1}$，而当无限地增大 k 时，$b_k - a_k \to 0$。單調序列 a_k 与 b_k 必有公共的極限 c，所以对于任意 k，$a_k \leqslant c \leqslant b_k$。既然属于一切区間 $\varDelta^{(k)}$ 的公共点不存在，点 c 自然也不是如此的公共点，所以对于一切足够大的 k，$\varDelta^{(k)}$ 就是 $(c, b_k]$，而 $b_k \to c$。如此

$$G(\varDelta^{(k)})=g(b_k+0)-g(c+0) \to 0,$$

因为 $g(b_k+0) \to g(c+0)$。由定义(103)并由剛才的推理，直接可得 $G(\varDelta)$ 的下面三个基本性質：

(1) $G(\varDelta)$ 是非負的；(2) 它是加法的，就是說，如果半开区間 $\varDelta$ 分解成有穷多个半开区間 $\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_q$，而这些半开区間互无公共点，这通常用下面等式表示：

$$\varDelta=\varDelta_1+\varDelta_2+\cdots+\varDelta_q,\tag{104}$$

那末

$$G(\Delta)=\sum_{k=1}^{q}G(\Delta_k); \tag{105}$$

(3)对于零区間序列,函数 $G(\Delta)$ 趋近于零。

这最后一性質叫做函数 $G(\Delta)$ 的正常性。这性質有很明显的物理意义。我們将不仅考察左边半开的区間,而考察任意的区間:$(\alpha,\beta]$,$[\alpha,\beta)$,$[\alpha,\beta]$,(α,β),并且單独的点 α 也看做是区間。由一个不減的有界函数 $g(x)$ 出發,可以作任意区間的函数 $G(\Delta)$,使它具有上列三种性質。为了得到这种結果,只須除定义(103)外再取下列定义:

$$\left.\begin{aligned}G([\alpha,\beta))&=g(\beta-0)-g(\alpha-0);\\G([\alpha,\beta])&=g(\beta+0)-g(\alpha-0);\\G((\alpha,\beta))&=g(\beta-0)-g(\alpha+0),\end{aligned}\right\} \tag{106}$$

而如果$[\alpha]$是由一点所成的区間,那末

$$G([\alpha])=g(\alpha+0)-g(\alpha-0)。 \tag{107}$$

如果不減函数 $g(x)$ 只在有穷区間上定义,例如在区間 $(a,b]$ 上,那末可以令:当 $x\leqslant a$ 时 $g(x)=g(a+0)$,当 $x>b$ 时 $g(x)==g(b)$,从而把这函数展延到全軸上。

我們曾由不減点函数 $g(x)$ 出發,而得出区間函数 $G(\Delta)$ 来。反之,也可以先有一个具有上述性質的区間函数 $G(\Delta)$,而作一点函数 $g(x)$,使它与 $G(\Delta)$ 有上述关系。只須令

$$g(x)=G((-\infty,x]) \tag{108}$$

就够了。如此作的函数 $g(x)$ 显然是右連續的。如果 $G(\Delta)$ 只定义于屬于某区間 Δ_0 的部分区間,那末它也可以定义于一切区間,只須令 $G(\Delta)=G(\Delta\cdot\Delta_0)$ 就够了,而区間的积 $\Delta\cdot\Delta_0$ 是指由既屬于 Δ 又屬于 Δ_0 的一切点所成的区間。如果这样的点不存在,那末 $\Delta\cdot\Delta_0$ 是空集合,可以令 $G(\Delta\cdot\Delta_0)=0$。如果对于 $g(x)$ 加上任意常数,那

末$G(\Delta)$的值并不受影响。如果$g(x)$是囿变函数，那末可以使用将它表成两个不减函数的差的典式：$g(x)=g_1(x)-g_2(x)$。由函数$g_1(x)$与$g_2(x)$可作具有上述性質的区間函数$G_1(\Delta)$及$G_2(\Delta)$，而由函数$g(x)$可得区間函数$G(\Delta)=G_1(\Delta)-G_2(\Delta)$。这函数可以直接用公式(106)与(107)由函数$g(x)$作出。它仍是加法的，正常的，但不一定是非負的。

18. 基本斯提勒杰斯积分 現在推广斯提勒杰斯积分的概念。在[3]中曾見到，如果只令在[3]中定义的i及I相等，就可以得到一种推广。此外，起始我們将只考察在半开区間$(a, b]$上的积分，并将这区間也分解成半开的部分区間$(x_{k-1}, x_k]$。如此分割点只屬于一个部分区間，并且只是做为右端。为了与在本节及下几节将介紹的积分区别，我們把在[2]中定义的斯提勒杰斯积分叫做初等斯提勒杰斯积分。

設有一有穷或无穷的半开区間$(a, b]$，并在它上面定义有界函数$f(x)$及$g(x)$，而$g(x)$是非减函数。分解$(a, b]$成部分区間$(x_{k-1}, x_k]$。設ξ_k是$(x_{k-1}, x_k]$中的某一点，而m_k及M_k各表示$f(x)$在$(x_{k-1}, x_k]$中的下、上确界。作和

$$\left.\begin{aligned} s_\delta &= \sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k+0)-g(x_{k-1}+0)]; \\ S_\delta &= \sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k+0)-g(x_{k-1}+0)]; \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k+0)-g(x_{k-1}+0)]。 \tag{110}$$

如果$b=+\infty$，那末$x_n=+\infty$，而可規定$g(+\infty+0)=g(+\infty)$。如果$a=-\infty$，那末$x_1=-\infty$，而依定义，$g(-\infty+0)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$。設$i$是对于一切可能分割$s_\delta$的上确界，而$I$是$S_\delta$的下确界。如果引入右連續的不减函数$h(x)=g(x+0)$，那末差$g(x_k+0)-g(x_{k-1}+0)$可以写成$h(x_k)-h(x_{k-1})$形式，而公式(109)与(110)可以写成下面形式：

$$s_\delta = \sum_{k=1}^{n} m_k[h(x_k)-h(x_{k-1})]; \quad S_\delta = \sum_{k=1}^{n} M_k[h(x_k)-h(x_{k-1})], \tag{109$_1$}$$

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[h(x_k)-h(x_{k-1})]。 \tag{110$_1$}$$

对于諸量s_δ, S_δ, σ_δ, i与I，在[3]中所說的一切都成立。

定义 所謂 $f(x)$ 依 $g(x)$ 在区間 (a, b) 上可积分，是指 $i=I$，而取 i 做积分值：

$$i=\int_a^b f(x)dg(x)=\int_{(a,b)} f(x)dg(x)。 \tag{111}$$

如此定义的积分叫做基本斯提勒杰斯积分。

在下面定理中我們討論这种积分的存在，以及借助和 σ_δ 而定义它的可能性。

定理 1. 积分 (111) 存在的必要且充分的条件乃是存在一序列的分割 $\delta_n(n=1, 2, 3, \cdots)$，使差 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}$ 趋近于零，或 σ_{δ_n} 对于任意选擇的点 $\xi_k^{(n)}$ 都有确定的極限。这一極限值 A 就是积分值。如此则 $s_{\delta_n}\to A$，而 $S_{\delta_n}\to A$。

这定理可以由与 [3] 的推理完全类似的方法直接推出，在現在考察的情形下諸部分区間无公点。注意定理中所說的分割序列不必是无限地細分的分割序列。例如假設存在一分割 δ，使 σ_δ 与点 ξ_k 的选擇无关，則可取一切 δ_n 与 δ 重合。提醒一下，在不減函数 $g(x)$ 的情形中初等斯提勒杰斯积分存在的必要且充分的条件乃是当无限地細分諸部分区間时对于任意分割序列，差 $S_\delta-s_\delta$ 趋向于零。如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上定义，而 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处右連續，并且初等斯提勒杰斯积分存在，那末基本斯提勒杰斯积分必存在，而二者之值相等。

現在介紹新概念。

定义 分割序列 δ_n 叫做对于函数 $g(x)$ 是正則的，是指它滿足下列两条件：(1) $g(x)$ 的每个間断点是自某个 n 值以后一切 δ_n 的分割点。(2) 当 n 增大时分割 δ_n 的諸部分区間无限地細分，而在无穷区間的情形下，无限細分的意思就是 [4] 中所說明的。

定理 2. 如果 δ_n 是正則的分割序列，那末 $s_{\delta_n}\to i$，$S_{\delta_n}\to I$。

設 δ 是 $[a, b]$ 的任意預定的分割，而 $\delta_n'=\delta\delta_n$。取 n 足够大，使一則 $g(x)$ 的間断点中又是 δ 的分割点的那些間断点也是 δ_n 的分割点，而二則 δ_n 的任一部分区間在它内部至多包含 δ 的一个分割点。这里应当注意，δ 的分割点数目是有穷的。用 p 表示这数目。設 $(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ 是分割 δ_n 中包含分割 δ 的分割点 x_s 的那个部分区間，这类区間的数目不大于 p。用 $m_k^{(n)}$ 表示 $f(x)$ 在 $(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ 中所取諸值的下确界，$\mu_k^{(n)}$ 是 $f(x)$ 在 $(x_{k-1}^{(n)}, x_s)$ 中所取諸值的下确界，而 $\nu_k^{(n)}$ 是它在 $(x_s, x_k^{(n)})$ 中所取諸值的下确界。由 s_{δ_n} 变成 $s_{\delta_n'}$ 时，式

$$m_k^{(n)}[g(x_k^{(n)}+0)-g(x_{k-1}^{(n)}+0)]$$

換成和

$$\mu_k^{(n)}[g(x_s+0)-g(x_{k-1}^{(n)}+0)]+\nu_k^{(n)}[g(x_k^{(n)}+0)-g(x_s+0)]。$$

如此，可以写成

$$s_{\delta_n'}=s_{\delta_n}-\sum m_k^{(n)}[g(x_k^{(n)}+0)-g(x_{k-1}^{(n)}+0)]+$$
$$+\sum\mu_k^{(n)}[g(x_s+0)-g(x_{k-1}^{(n)}+0)]+\sum\nu_k^{(n)}[g(x_k^{(n)}+0)-g(x_s+0)]。\quad(112)$$

$g(x)$的間断点又是δ的分割点者依条件已出現于δ_n的分割点中，因此点x_s是$g(x)$的連續点，所以$g(x_s+0)=g(x_s)$。公式(112)中的和是依一切屬于δ_n而包含分割δ的分割点x_s于其內的区間而取的，并且这些和中項数不大于p。因子$m_k^{(n)}, \mu_k^{(n)}, \nu_k^{(n)}$都是有界的，而当无限地增大$n$时方括弧中的差趋向于零，因为依正則的分割序列$\delta_n$的定义，諸部分区間无限地細分，而区間$[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$包含函数$g(x)$的連續点$x_s$于其內部。如此，$s_{\delta_n'}-s_{\delta_n}\to 0$。另一方面，不等式$s_{\delta_n}\leqslant s_{\delta_n'}\leqslant i$及$s_\delta\leqslant s_{\delta_n'}\leqslant i$成立。我們可以取分割$\delta$，使$s_\delta$与$i$相差任意小，就是說对于任意預定的正数$\varepsilon$，可以取$\delta$，使$i-s_\delta<\varepsilon$。由不等式$s_\delta\leqslant s_{\delta_n'}\leqslant$ $\leqslant i$可知$i-s_{\delta_n'}<\varepsilon$，而最后由上面得到的結果$s_{\delta_n'}-s_{\delta_n}\to 0$可知对于一切足够大的$n$，$i-s_{\delta_n}<2\varepsilon$既然$\varepsilon$是任意的，这就是說，$s_{\delta_n}\to i$，而这正是所要証的。完全同样地可以証明$S_{\delta_n}\to I$。注意，如果$g(x)$是連續的，那末正則分割序列的特征只是其部分区間无限地細分。例如，对于黎曼积分，$g(x)=x$，这便是如此。既然x在无穷区間上是无界的，在作正常黎曼积分时只应当考察有界区間。

定理 3. 如果积分(111)存在，并等于A，那末对于任意正則分割序列δ_n，$\sigma_{\delta_n}\to A$。

由定理的条件可知$i=I=A$。如此依上面定理$s_{\delta_n}\to A$，$S_{\delta_n}\to A$，而因为σ_{δ_n}滿足不等式$s_{\delta_n}\leqslant\sigma_{\delta_n}\leqslant S_{\delta_n}$，无論如何选擇諸点$\xi_k^{(n)}$，$\sigma_{\delta_n}$一定趋向于$A$。

系 如果对于某一正則分割序列δ_n存在極限$\sigma_{\delta_n}\to A$，那末对于任意其他正則序列，这極限也存在，并且也等于A。如此則积分存在，并等于A。如果对于某正則序列δ_n，σ_{δ_n}沒有确定的極限，那末积分(111)不能存在。

如此应用依正則分割序列所作的和σ_δ可以解决关于基本斯提勒杰斯积分存在的問題。

不难借区間函数$G(\Delta)$而陈述基本斯提勒杰斯积分的定义，只須注意点函数$g(x)$及区間函数$G(\Delta)$之間的联系就够了。設在半开区間Δ_0上定义了有界的点函数$f(x)$及非負加法正常区間函数$G(\Delta)$。分割Δ_0成有穷多个互无公点的半开区間$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，并作和

$$s_\delta = \sum_{k=1}^{n} m_k G(\Delta_k); \tag{113}$$

$$S_\delta = \sum_{k=1}^{n} M_k G(\Delta_k); \tag{114}$$

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) G(\Delta_k), \tag{115}$$

其中 m_k, M_k, 及 ξ_k 的意义都与以前一样。与上面相同，用 i 表示和 s_δ 的上确界，用 I 表示和 S_δ 的下确界。如果 $i=I$，那末我們說 $f(x)$ 依 $G(\Delta)$ 可积分，并且把积分写成下面的形式：

$$\int_{\Delta_0} f(x) G(d\Delta) = \int_{\Delta_0} f(x)\, dg(x)。 \tag{116}$$

如果 $f(x)$ 是常数 c，那末显然积分等于 $cG(\Delta)$。

19. 基本斯提勒杰斯积分的性質 我們曾看到，可以选擇某分割序列而求和 σ_δ 的極限，以得出基本斯提勒杰斯积分来。这时，如果 σ_{δ_n} 有确定的極限，而 δ_n' 是 δ_n 的后繼，那末 $\sigma_{\delta_n'}$ 也有同一極限。如此，可以利用和 σ_δ 而証明基本斯提勒杰斯积分的性質，与在黎曼积分及初等斯提勒杰斯积分的情形中一样。在下面函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都設做在积分区間中有界的，并且設 $g(x)$ 是不減的。

I. 如果 c_k 是常数，那末

$$\int_{\Delta_0} \sum_{k=1}^{p} c_k f_k(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_{\Delta_0} f_k(x)\, dg(x), \tag{117}$$

由右边积分的存在可得出左边积分的存在。

为了証明，只須取对于函数 $g(x)$ 的一个正則序列 δ_n。

II. 如果 $g_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, p)$ 是不減有界函数，而 c_k 是正的常数，那末

$$\int_{\Delta_0} f(x)\, d\left(\sum_{k=1}^{p} c_k g_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_{\Delta_0} f(x)\, dg_k(x), \tag{118}$$

而由右边积分的存在可得出左边积分的存在，反过来也是正确的。

設 $\delta_n^{(k)}$ 是对于函数 $g_k(x)$ 的正則分割序列。序列 $\delta_n=\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}, \cdots, \delta_n^{(p)}$ 对于一切函数 $g_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, p)$ 都是正則序列。顯然

$$S_{\delta_n} - s_{\delta_n} = \sum_{k=1}^{p} c_k \left(S_{\delta_n^{(k)}} - s_{\delta_n^{(k)}}\right), \tag{119}$$

其中 s_{δ_n} 及 S_{δ_n} 趋向于 (118) 左边的积分，而 $s_{\delta_n^{(k)}}$ 及 $S_{\delta_n^{(k)}}$ 趋向于右边的积分，

如果公式(118)右边的諸积分存在，那末 $S_{\delta_n^{(k)}}-s_{\delta_n^{(k)}}\to 0$ $(k=1, 2, \cdots, p)$，所以 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，就是說左边的积分也存在。現在設后一积分存在。如此应当存在分割序列 δ_n，使 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$。公式(119)右边諸項都是非負的，所以对于 $k=1, 2, \cdots, p$，$S_{\delta_n^{(k)}}-s_{\delta_n^{(k)}}\to 0$，就是說公式(118)右边諸积分也存在。对于有穷和 σ_{δ_n} 作与(118)相类的公式，再取極限，可得公式(118)。

III. 如果区間 Δ_0 分割成有穷多个互无公点的区間 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$，那末

$$\int_{\Delta_0} f(x)\,dg(x)=\sum_{k=1}^{m}\int_{\Delta_k} f(x)\,dg(x), \tag{120}$$

而由右边积分存在可知左边积分存在，反过来也是正确的。設左边积分存在。依定理 I 可知有 Δ_0 的一分割序列 δ_n 存在，使 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$。用 δ 表示 Δ_0 的一分割，分它成部分 Δ_k $(k=1,2,\cdots,m)$，并設 $\delta_n'=\delta_n\delta$。显然 $S_{\delta_n'}-s_{\delta_n'}\to 0$，因为 $s_{\delta_n'}\geqslant s_{\delta_n}$，$S_{\delta_n'}\leqslant S_{\delta_n}$。形状如(16)并表示 $S_{\delta_n'}-s_{\delta_n'}$ 的和可以分解成 m 个非負項，其中每一項表示某一 Δ_k 的相应和，而旣然整个和趋向于零，可知个别項也趋向于零，就是說公式(120)右边諸积分存在。反之，設右边諸积分都存在。对于每个如此的积分必存在分割序列 $\delta_n^{(k)}$，使差 $S_{\delta_n^{(k)}}-s_{\delta_n^{(k)}}\to 0$。由这些分割序列可得区間 Δ_0 的一分割序列，而与公式(120)左边积分相应的差值也趋向于零。留意对于初等斯提勒杰斯积分，在公式(3)的第三式中由右边积分的存在并不能推知左边积分的存在①。

IV. 如果在区間 Δ_0 上，$|f(x)|\leqslant L$，那末

$$\left|\int_{\Delta_0} f(x)\,dg(x)\right|\leqslant LG(\Delta_0), \tag{121}$$

其中 $G(\Delta_0)$ 是函数 $g(x)$ 在区間 Δ_0 上的增量。

V. 如果在区間 Δ_0 上函数 $f_p(x)$ 当 $p\to\infty$ 时一致收斂于 $f(x)$，而 $f_p(x)$ 依 $g(x)$ 的积分都存在，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分也存在，而下面公式成立：

$$\lim_{p\to\infty}\int_{\Delta_0} f_p(x)\,dg(x)=\int_{\Delta_0} f(x)\,dg(x). \tag{122}$$

設 $\Delta_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \cdots, t_n)$ 是对于函数 $g(x)$ 的某正則分割序列中分割 δ_n 的諸部分区間。考察对于函数 $f_p(x)$ 及函数 $f(x)$ 所作的和 $\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ 及 σ_{δ_n}，显然，旣然 $f_p(x)$ 一致收斂于 $f(x)$，函数 $f(x)$ 也必是有界的：

① 譯者注：在第3节末尾譯者注中所举的例中，$\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x)$ 及 $\int_{0}^{1} f(x)\,dg(x)$ 都存在($=0$)，但 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$ 并不存在。

$$\sigma_{\delta_n}^{(p)}=\sum_{k=1}^{l_n} f_p(\xi_k^{(n)})G(\Delta_k^{(n)});\ \sigma_{\delta_n}=\sum_{k=1}^{l_n} f(\xi_k^{(n)})G(\Delta_k^{(n)})。\tag{123}$$

在諸和中諸点 $\xi_k^{(n)}$ 可以取做一样的。作差

$$\sigma_{\delta_n}-\sigma_{\delta_n}^{(p)}=\sum_{k=1}^{l_n}[f(\xi_k^{(n)})-f_p(\xi_k^{(n)})]G(\Delta_k^{(n)})。$$

对于任意預定的正数 ε，必存在一数 N，使当 $p>N$ 时，对于 Δ_0 中的任意 x，$|f(x)-f_p(x)|<\varepsilon$；这是由于 $f_p(x)$ 收斂的一致性而成为可能的。当 $p>N$ 及任意选擇 $\xi_k^{(n)}$ 时，对于差 $\sigma_{\delta_n}-\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ 可得：$|\sigma_{\delta_n}-\sigma_{\delta_n}^{(p)}|<\varepsilon G(\Delta_0)$。由此，当 $p\to\infty$ 时，$\sigma_{\delta_n}^{(p)}\to\sigma_{\delta_n}$，而这收斂对于 n 及諸点 $\xi_k^{(n)}$ 的选擇都是一致的。依条件 $f_p(x)$ 是依 $g(x)$ 可积分的，所以，当无限地增加 n 时，每个和 $\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ 都有極限，我們用 A_p 表示这極限。这極限就是 $f_p(x)$ 依 $g(x)$ 的积分。現在証明数列 A_p 有極限。事实上，

$$A_q-A_p=(A_q-\sigma_{\delta_n}^{(q)})+(\sigma_{\delta_n}^{(p)}-A_p)+(\sigma_{\delta_n}^{(q)}-\sigma_{\delta_n})+(\sigma_{\delta_n}-\sigma_{\delta_n}^{(p)})。\tag{124}$$

既然当 $p\to\infty$ 时 $\sigma_{\delta_n}^{(p)}$ 一致收斂于 σ_{δ_n}，对于任意預定的 $\varepsilon>0$ 必存在一数 M，使当 p 及 $q>M$ 时 $|\sigma_{\delta_n}^{(q)}-\sigma_{\delta_n}|<\varepsilon$，$|\sigma_{\delta_n}-\sigma_{\delta_n}^{(p)}|<\varepsilon$。固定任意两个滿足上面条件的数値 p 及 q，可以取足够大的 n 值，使公式(124)右边前两項依絕对值都小于 ε。如此可得当 p 及 $q>M$ 时 $|A_q-A_p|<4\varepsilon$，由此可知当 $p\to\infty$ 时極限 $A_p\to A$ 存在。剩下的只是証明当 $n\to\infty$ 时 $\sigma_{\delta_n}\to A$ 了。注意

$$A-\sigma_{\delta_n}=(A-A_p)+(A_p-\sigma_{\delta_n}^{(p)})+(\sigma_{\delta_n}^{(p)}-\sigma_{\delta_n})。$$

首先取 p 足够大，使对于任意 n 及 $\xi_k^{(n)}$，$|A-A_p|<\varepsilon$ 及 $|\sigma_{\delta_n}^{(p)}-\sigma_{\delta_n}|<\varepsilon$。又对于一切足够大的 n，对于由上面固定了的 p，$|A_p-\sigma_{\delta_n}^{(p)}|<\varepsilon$。如此 $|A-\sigma_{\delta_n}|<3\varepsilon$，既然 ε 是任意的，可知 $\sigma_{\delta_n}\to A$。

VI. 如果 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在，那末 $|f(x)|$ 依 $g(x)$ 的积分存在，并且下面不等式成立：

$$\left|\int_{\Delta_0} f(x)dg(x)\right|\leqslant\int_{\Delta_0}|f(x)|dg(x)。\tag{125}$$

引用与函数 $f(x)$ 相应的通常記号 M_k 及 m_k。如果两数都是正的，那末 $|f(x)|$ 的确界也是 M_k 及 m_k。如果两数都是負的，那末 $|f(x)|$ 的相应上、下确界乃是数 $|m_k|$ 及 $|M_k|$，而上下确界的差仍是与原来 $f(x)$ 的相应差相等。最后，如果 m_k 是負的，M_k 是正的，那末 $|f(x)|$ 的上确界乃是 $|m_k|$ 及 M_k 两数中的較大者，而其下确界不小于零。因而无論如何，$|f(x)|$ 的上下确界的差不超过 $f(x)$ 的上下确界的差。因此，如果对于某分割序列，$f(x)$ 的差

$S_{\delta_n}-s_{\delta_n}$ 趋向于零，那末对于同一序列，$|f(x)|$的相应差也趋向于零，就是說由 $f(x)$ 的积分的存在可知 $|f(x)|$的积分也存在。不等式(125)可以由关于相应的和的不等式取極限得出来。

VII. 如果函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 依 $g(x)$ 可积分，那末它們的积 $f_1(x)f_2(x)$ 依 $g(x)$ 也可积分。

首先証明当 $f(x)$ 依 $g(x)$ 可积分时，$f^2(x)$ 依 $g(x)$ 也可积分。設 $f(x)$ 是正的，并对于 $f(x)$ 及 $f^2(x)$ 作和 σ_δ：

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)G(\Delta_k),$$

$$\sigma'_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k^2-m_k^2)G(\Delta_k)=\sum_{k=1}^{n}(M_k+m_k)(M_k-m_k)G(\Delta_k)。$$

如果第一和对于某分割序列趋向于零，依 M_k+m_k 的有界性可知第二和对于同一分割序列也趋向于零。如此对于正函数 $f(x)$，由 $f(x)$ 的可积分性可知 $f^2(x)$的可积分性。如果$f(x)$不是正的，那末由于其有界性可知有一正数 a 存在，使函数 $f(x)+a$ 是正的。依性質 1，这新函数也是可积分的，所以函数 $[f(x)+a]^2=f^2(x)+2af(x)+a^2$ 也是可积分的。由此可知 $f^2(x)=[f(x)+a]^2-2af(x)-a^2$ 也是可积分的。最后，为了証明 $f_1(x)f_2(x)$ 的可积分性，只須把这积表示成下面形式：

$$f_1(x)f_2(x)=\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]^2-\frac{1}{2}f_1^2(x)-\frac{1}{2}f_2^2(x)。$$

上面等式右边都是可积分函数，于是命题証明了。

20. 基本斯提勒杰斯积分的存在　当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的間斷点重合时，基本斯提勒杰斯积分仍可以存在。現在証明下面的定理。

定理　如果 $f(x)$ 是单調并有界的，而在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的間斷点相重合处 $f(x)$ 是左連續的，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的基本斯提勒杰斯积分必存在。

分解 $f(x)$ 成跃度函数与連續函数之和：$f(x)=f_d(x)+f_c(x)$。連續函数 $f_c(x)$ 依 $g(x)$是可积分的。剩下的只是要証明 $f_d(x)$ 依 $g(x)$可积分。但 $f_d(x)$ 可以表示成初等跃度函数的一致收斂級数，因而只須就这种初等跃度函数而証明其依 $g(x)$的可积分性就够了。在左連續的情形，这样的函数必取如下形式：

当 $x\leqslant d$ 时，$\omega(x)=0$，

当 $x>d$ 时，$\omega(x)=\gamma$。

对于$(a, b]$的以d为其一分割点的任一分割，和s_δ及S_δ是相等的：$s_\delta = S_\delta = \gamma[g(b)-g(d+0)]$，所以$\omega(x)$依$g(x)$是可积分的。現在設$\omega(x)$是初等跃度函数，并在間断点处是任意的，就是說，当$x<d$时$\omega(x)=0$，而当$x>d$时$\omega(x)=\gamma$，而$x=d$不是$g(x)$的間断点。这时当取无限地細分的分割序列$\delta_n$时，如果$x=d$是它們的一个分割点，則和$s_{\delta_n}$及$S_{\delta_n}$都以$\gamma[g(b)-g(d)]$为极限。

可以把基本斯提勒杰斯积分的定义推广到$g(x)$是囿变函数的情形。取$g(x)$表成不减函数差的典式：$g(x)=g_1(x)-g_2(x)$。如果$f(x)$依$g_1(x)$及$g_2(x)$都按基本积分的意义可积分，那末我們定义$f(x)$依$g(x)$的基本斯提勒杰斯积分如下：

$$\int_{\Delta_0} f(x)dg(x)=\int_{\Delta_0} f(x)dg_1(x)-\int_{\Delta_0} f(x)dg_2(x)。\tag{126}$$

由刚才証明的定理可知：如果$f(x)$及$g(x)$是囿变函数，而在$f(x)$与$g(x)$的間断点重合处，$f(x)$是左连續的，那末$f(x)$依$g(x)$可积分。如果$g(x)$是囿变函数时，积分性質的陈述須作适当的修改。例如(121)須換成

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leqslant LV_a^b(g)。\tag{127}$$

在公式(119)中$g_k(x)$是囿变函数，系数c_k也是可正可負的。由右边积分的存在可知左边积分也存在，但我們无权談到逆命題的正确性了。

21. 一般斯提勒杰斯积分 現在討論关于古典斯提勒杰斯积分的最后推广。与基本斯提勒杰斯积分相比，分别在于基本区間及分割的部分区間不限于半开的，而是一切可能的区間，甚至包括看做区間的單独点。除此以外积分的定义与基本斯提勒杰斯积分一样。設Δ_0是預給的一区間（有穷的或无穷的），而$f(x)$是定义于其上的有界函数，$G(\Delta)$是对于凡含于Δ_0中的区間Δ定义的非負、加法、正常的区間函数。設δ是分Δ_0成有穷多互无公点的区間$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$的分割，作和(113)及(114)；并設$i$是和$s_\delta$的上确界，$I$是和$S_\delta$的下确界，而取上下界时是就区間$\Delta_0$的一切可能分割而言的。

定义 我們說，$f(x)$依$G(\Delta)$在区間Δ_0上可积分，是指$i=I$，而i取做积分值：

$$i=\int_{\Delta_0} f(x)G(d\Delta)。\tag{128}$$

如此定义的积分叫做一般斯提勒杰斯积分。

注意因使用任意区間而發生的某些情况。如果点$P(x)$是Δ_0的分割中的独立元素，那末在和s_δ，S_δ，及σ_δ中相应項的形式是$f(x)G(P)$。如果Δ'及Δ''是两区間，那末它們的积$\Delta'\Delta''$乃是指既属于Δ'也属于Δ''的点所組成的集合。这集合或是区間，或是空集合。設δ'及δ''是区間Δ_0的两分割。所謂分割δ'及δ''的积是指由一切可能的区間$\Delta'\Delta''$所組成的分割$\delta'\delta''$，其中Δ'是δ'中的区間，Δ''是δ''中的区間。諸区間$\Delta'\Delta''$显然是无公共点的，而其和正好是基本区間Δ_0。分割δ'叫做分割δ的后繼，是指分割δ'中的每个元素完全含于分割δ的某一元素之中。凡在[3]中关于s_δ，S_δ，σ_δ，i，I所叙述的，在現在的情形中仍然正确。

不难对于一般斯提勒杰斯积分証明在[18]中关于基本积分所叙述的那三个基本定理。[18]中的定理1仍可同样地陈述，其正确性可由[3]直接得出。在定义正則分割序列时則須作某些改变。

定义　在一般斯提勒杰斯积分的情形下，分割序列δ_n叫做对于函数$g(x)$正則的，是指下面两条件滿足：(1) $g(x)$的每个間断点是自某一n值以后的一切分割δ_n中的独立元素；(2) 当无限地增大n时，分割δ_n的諸部分区間无限地細分。

注意在第一条件中要求$g(x)$的間断点不是δ_n的分割点，而是这分割中的独立元，也就是說，是δ_n的部分区間。依所述关于一般斯提勒杰斯积分的正則分割序列的定义，定理2的陈述及証明的方法仍然有效。关于定理3及其系也是一样。

即使基本斯提勒杰斯积分不存在时，在半开区間上也可能存在一般斯提勒杰斯积分。这可以由下面的思考而明了。在作一般斯提勒杰斯积分时，关于分解基本半开区間$(a, b]$成部分，曾使用了更广闊的可能性。諸数s_δ的集合扩大了，其上确界i可能增大。反之，諸数S_δ的上确界I可能减小。因此，如果在对于某函数$f(x)$所作的基本斯提勒杰斯积分中，$i<I$，在对于同一函数$f(x)$所作的一般斯提勒杰斯积分中可能$i=I$。

一般斯提勒杰斯积分具有在[19]中所叙述的各种性質。在基本斯提勒杰斯积分的情形下，并非任一有界函数都是依跃度函数可积分的。在一般积分的情形下，則这种积分一定存在：

定理　依一般斯提勒杰斯积分的意义，任意有界函数$f(x)$依跃度函数$g_d(x)$都是可积分的。

首先設$g(x)$只有有穷多个間断点：$c_1, c_2, \cdots, c_p$。設δ是基本区間的一

个分割 δ，定义如下：区間的两端(如果它們屬于积分域)及諸点 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 是 δ 的独立元素，δ 的其余元素則是由上述諸点所界的諸开区間。在每个如此的区間上 $g_d(x)$ 是定値的，而与 $f(x)$ 依 $g_d(x)$ 的积分相应的諸和显然是相同的，并都等于

$$s_\delta = S_\delta = \sum_{k=1}^{p} f(c_k)\gamma_k。 \tag{129}$$

如此，$f(x)$ 依 $g_d(x)$ 的积分存在，并由和(129)表示。現在設函数 $g_d(x)$ 的間断点 c_k 有无穷多。設 δ_n 是与上述的那些分割同样的分割，但其独立元素是区間的端点及前 n 个間断点，$c_1, c_2, \cdots, c_n$。对于如此的分割序列 δ_n，作諸和 σ_{δ_n}。和 σ_{δ_n} 中与做为分割的独立元素的諸点相应的諸項之和等于

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\gamma_k,$$

而这与諸点 ξ_k 的选擇无关。考察出現于分割 δ_n 中的某一开区間 (α, β)。和 σ_{δ_n} 中与它相应的項乃是

$$f(\xi)[g(\beta-0)-g(\alpha+0)] \quad (\alpha<\xi<\beta)。$$

如果 $|f(x)|\leqslant L$，那末

$$|f(\xi)|[g(\beta-0)-g(\alpha+0)]\leqslant L[g(\beta-0)-g(\alpha+0)],$$

而差 $g(\beta-0)-g(\alpha+0)$ 乃是 $g(x)$ 在区間 (α, β) 中諸跃度之和。如此，σ_δ 中与分割 δ_n 的諸开区間相应的諸項之和依絕对値不大于函数 $g(x)$ 的除在諸点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的跃度以外的一切跃度之和与 L 的乘积。当无限地增大 n 时，这和趋向于零，而与上述諸点相应的項之和的極限乃是收斂級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(c_k)\gamma_k, \tag{130}$$

所以 $f(x)$ 依 $g_d(x)$ 的积分存在，并由級数(130)表示，这正是所要証的。

如此，关于一般斯提勒杰斯积分存在的問題化成关于 $f(x)$ 依連續不減函数 $g(x)$ 的积分存在的問題。对于这种連續函数，正則分割序列可以是任意具有无限細分的部分区間的分割序列，而 $f(x)$ 依 $g_c(x)$ 按一般积分的意义可积分的必要且充分的条件与对于初等积分所述的完全一样。如果 $g(x)$ 是囿变函数，那末 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的一般积分与基本积分一样由公式(126)定义。依上述的定理，任一囿变函数 $f(x)$ 依任一囿变函数 $g(x)$ 按一般积分的意义可积分。

举出一类依任意的有界增函数 $g(x)$ 可积分的函数。所謂 $f(x)$ 是在区間

Δ_0 上片段定值的，是指这区間可以分割成有穷多无公点的区間 $\Delta^{(1)}$，$\Delta^{(2)}$，…，$\Delta^{(m)}$，使 $f(x)$ 在每个区間 $\Delta^{(k)}$ 上保持不变的値 b_k。不难看出，凡片段定值的函数依任意的 $g(x)$ 可积分。事实上，如果 δ 是 Δ_0 的分割，分它成部分区間 $\Delta^{(k)}$，那末和 s_δ 与 S_δ 是相同的：

$$s_\delta = S_\delta = \sum_{k=1}^{m} b_k G(\Delta^{(k)})。\tag{131}$$

重复使用这分割 δ，可知片段定值函数 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在，并由和 (131) 表示。引用 [19] 中的性質 V，可知：如果函数 $f(x)$ 在区間 Δ_0 上乃是片段定值函数 $f_p(x)$ 的一致收斂的極限，那末它依任意有界增函数 $g(x)$ 按一般斯提勒杰斯积分的意义可积分。

22. 平面上的区間函数 　区間的加法函数概念及斯提勒杰斯积分的作法在平面上，在三維空間，及一般地在多維空間中較为复杂。我們考察平面的情形。由所述的推理法很容易看出对于維数更大的空間应作如何的改变。設有一平面，其上有坐标軸 X 及 Y，并設在 X 軸上有某一区間 Δ_x，而在 Y 軸上有某一区間 Δ_y，此处区間的概念是依 [21] 中所述的一般意义了解的。这两区間 Δ_x 及 Δ_y 在平面上定义某一区間 Δ，就是說，一点 (x, y) 屬于 Δ，是指 x 屬于 Δ_x，y 屬于 Δ_y。这些在平面上的区間也可以是各种各样的。它可能是閉区間，并由不等式 $a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$ 定义，或是由不等式 $a<x\leqslant b$，$c<y\leqslant d$ 定义的半开区間，或是由不等式 $a\leqslant x<b$，$c\leqslant y<d$ 定义的半开区間，或是由不等式 $a<x<b$，$c<y\leqslant d$ 定义的半开区間，或是平行于 X 軸的一个直綫綫段：$a<x\leqslant b$，$y=c$，或竟是一点 $x=a$，$y=c$ 等等。在上述各式中出現的諸数 a，b，c，d 可以是有穷的，也可以是无穷的。在下面，对我們有較大意义的乃是由不等式 $a<x\leqslant b$，$c<y\leqslant d$ 决定的半开区間，而为簡單起見在下面只把如此的区間叫做半开区間。

設 Δ_0 为平面上一区間，取它做基本区間，并在一个屬于 Δ_0 的任意区間 Δ 上定义某一非負函数 $G(\Delta)$，而这函数有加法性及

正常性。換句話說，如果 Δ 可以表示成互无公点的几个区間之和：$\Delta=\Delta^{(1)}+\Delta^{(2)}+\cdots+\Delta^{(m)}$，那末

$$G(\Delta)=\sum_{k=1}^{m}G(\Delta^{(k)}),$$

而如果 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ 是区間的零序列，則 $G(\Delta_n)\to 0$。

現在闡明这种函数的几个性質。由函数 $G(\Delta)$ 的非負性及加法性，直接可知 $G(\Delta_0)$ 乃是屬于 Δ_0 之諸 Δ 上函数 $G(\Delta)$ 之最大值。当区間 Δ 是一个个别的点 P 时，我們簡單地用 $G(P)$ 表示 $G(\Delta)$ 的値，而由于函数 $G(\Delta)$ 的非負性，$G(P)\geqslant 0$。可以設，在屬于 Δ_0 的一切点 P 处，$G(P)=0$。在这情形下函数 $G(\Delta)$ 叫做在 Δ_0 中連續的。如果 $G(P)>0$，那末点 P 叫做 $G(\Delta)$ 的間断点。不难証明，間断点集合是有穷的，或是可数无穷的[參見第 6 节]。取滿足 $G(P)>1$ 的間断点。依 $G(\Delta)$ 的加法性及正常性，如此点的数目不能大于数 $G(\Delta_0)$ 的整数部分。同样，滿足 $G(P)>\frac{1}{2}$ 的諸間断点的总数不能大于 $2G(\Delta_0)$ 的整数部分，如此类推。如此，与在 [6] 中完全一样，可知間断点的总数是有穷或是可数无穷的。如果是可数无穷的，而 $P_1, P_2, \cdots$ 是这一切間断点組成的序列，則由諸正数 $G(P_k)$ 所成的級数收斂，并滿足不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}G(P_k)\leqslant G(\Delta_0)。\tag{132}$$

完全同样地，設 l 是一条平行于一坐标軸的直綫含于 Δ_0 中的部分，而且 $G(l)>0$，則 l 叫做間断綫。凡平行于一坐标軸并通过一个間断点的直綫必是間断綫。但可能有間断綫，并不包含任何間断点①。与上面完全一样，可以証明，如果間断綫存在，那末它們的数目有穷或可数无穷。这里，Δ_0 內与坐标軸平行的間断綫是

① 譯者注：例如設 $G(\Delta)$ 对于平面上的一切区間 Δ 定义如下：$G(\Delta)$ 等于 Δ 截取直綫 $x=0$ 的那綫段之長度。則 $x=0$ 是間断綫，但它上面的点都是 $G(\Delta)$ 的連續点。

指整个綫段。設有一区間序列 $\Delta_n(n=1, 2, \cdots)$，Δ_n 包含 Δ_{n+1}，而为一切区間 Δ_n 所公有的，仅是 P 点或是綫 l 上的一切点。在这情形下，我們說 Δ_n 是一个趋向于 P 或 l 的縮区間組（l 是平行于一个坐标軸的直綫綫段）。应用函数 $G(\Delta)$ 的正常性，可以証明，如果 Δ_n 是趋向于 P 或 l 的縮区間組，那末 $G(\Delta_n)\to G(P)$ 或 $G(l)$。現在証明关于点 P 的情形，幷設 P 位于一切区間 Δ_n 之內部，幷且这些区間都是开的。通过 P 作平行于坐标軸的直綫，幷把每个区間 Δ_n 分成下列諸部分：点 P，及上述两直綫为 P 所截幷包含于 Δ_n 中的四綫段、以及所余的四个区間。当 Δ_n 无限地縮向点 P 时，所作的一切分割部分，除却点 P 之外，各自組成零区間序列，而由于 $G(\Delta)$ 的正常性，对于每个如此的序列 $G(\Delta)$ 必趋向于零。注意函数 $G(\Delta)$ 的加法性，可以看出，$G(\Delta_n)\to G(P)$。完全同样也可以討論关于 P 点的其他情形及直綫 l 的情形[①]。

如果把 $G(\Delta)$ 解釋成在基本区間 Δ_0 上的某物質分布中位于区間 Δ 上的質量，上面的定义就很清楚了。例如設 $G(P)>0$，那末在点 P 处集中有質量 $G(P)$。同样，如果 $G(l)>0$，則質量 $G(l)$ 依某种方式分布于綫 l 上。例如設有半开区間 $\Delta_0(0<x\leqslant 2;\ 0<<y\leqslant 2)$，而在其中在綫段 $l_0(x=1,\ 0<y\leqslant 1)$ 上分布有質量，其綫性密度是 1。在这情形中 $G(\Delta)$ 等于 Δ 所包含綫段 l_0 的那部分的長度。在屬于 Δ_0 的任意点 P 处，$G(P)=0$。如果 Δ_n 是趋向于 l_0 的縮区間組，那末其面积趋向于零，但 $G(\Delta_n)$ 对于一切 n 都等于 1。

注意在屬于 Δ_0 的一切区間上定义的函数 $G(\Delta)$ 可以很容易推广到平面的一切区間上去，而所得函数仍是非負的、加法的、正常的。事实上，如果 Δ 是任意区間，而 $\Delta\Delta_0$ 是区間 Δ 及 Δ_0 的积，

① 以后我們將不但对于区間，而且对于远为一般的点集合証明 $G(\Delta)$ 的上述性質。

就是說，由既屬于 Δ 也屬于 Δ_0 的一切点所成的集合，那末这积是屬于 Δ_0 的区間，而如此就得出上述的那种函数 $G(\Delta)$ 的推广，就是說令 $G(\Delta)=G(\Delta\Delta_0)$。如果把 $G(\Delta)$ 解釋成在区間 Δ 上的質量，而一切質量分布于区間 Δ_0 上，則很容易从物理上来解釋推广了的函数 $G(\Delta)$。

以后我們可以看出，如果只在諸半开区間上給出了一个非負的、加法的、正常的函数，那末它不仅可以用唯一的方式扩展到一切区間上去，而且，还可以扩展到平面上極寬广的点集合类上去，并仍保存上述的一切性質。同时，像上面說的，这函数在点上及在綫 l 上的数值，可以借其在縮区間組上的值取極限而得出，并且这極限值与縮区間組的选擇无关。

不难把函数 $G(\Delta)$ 分解成跃度函数及連續部分。設 $G(\Delta)$ 是非負的、加法的、正常的，并且定义于一切属于 Δ_0 的 Δ 上。用 $P_k(k=1, 2, \cdots)$ 表示这函数的間断点。定义跃度函数 $G_d(\Delta)$ 如下：$G_d(\Delta)$ 等于在屬于 Δ 的諸 P_k 点处諸值 $G(P_k)$ 之和。注意，如果这間断点集合是可数无穷的，那末由 $G(P_k)$ 組成的級数是收斂的。用 $G_c(\Delta)$ 表示差值 $G(\Delta)-G_d(\Delta)$。这一函数沒有間断点。不难看出，函数 $G_d(\Delta)$ 及 $G_c(\Delta)$ 是非負的、加法的、正常的。正常性直接由下面不等式得出：$0\leqslant G_d(\Delta)\leqslant G(\Delta)$，$0\leqslant G_c(\Delta)\leqslant G(\Delta)$。我們写出所得函数 $G(\Delta)$ 的分解如下：

$$G(\Delta)=G_d(\Delta)+G_c(\Delta)。$$

23. 化到点函数 用点函数 $g(x, y)$，可以作区間函数 $G(\Delta)$。設有一点函数 $g(x, y)$，設它对于一切屬于 X 軸上区間 $\Delta_x^{(0)}$ 的 x 及一切屬于 Y 軸上区間 $\Delta_y^{(0)}$ 的 y 有定义，而 $\Delta_x^{(0)}$ 及 $\Delta_y^{(0)}$ 定义平面上一基本区間 Δ_0。再設函数 $g(x, y)$ 当固定一个变数时对于另一变数是不减的，并且

$$g(x+h, y+k)-g(x+h, y)-g(x, y+k)+g(x, y)\geqslant 0 \quad (133)$$

对于任意的 x 及 y 以及任意的正数 h 及 k 成立。由所述可知極限 $g(x, y\pm 0)$ 及 $g(x\pm 0, y)$ 存在，并且：

(1) $g(x_2, y+0)\geqslant g(x_1, y+0)$；$g(x_2, y-0)\geqslant g(x_1, y-0)$ 如果 $x_2>x_1$，而

(2) $g(x+0, y_2)\geqslant g(x+0, y_1)$；$g(x-0, y_2)\geqslant g(x-0, y_1)$ 如果 $y_2>y_1$。

由于这些公式表示出来的單調性，可以依次按各个变数取極限：

$$A=\lim_{k\to+0}\lim_{h\to+0} g(x+h, y+k), \quad B=\lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0} g(x+h, y+k),$$

并且可以証明它們相等。因为 $g(x+h, y+k)\geqslant g(x+h, y+0)$，首先依 h 取極限，再依 k 取極限，得 $A\geqslant B$。完全同样地可以証明 $B\geqslant A$，所以 $B=A$。很自然地可以用 $g(x+0, y+0)$ 表示量 $A=$ $=B$。完全同样可以証明

$$\lim_{k\to+0}\lim_{h\to+0} g(x-h, y-k)=\lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0} g(x-h, y-k),$$

而这極限值自然地可以表示成 $g(x-0, y-0)$。到此为止我們只应用了 $g(x, y)$ 依每个变数是非减函数这一事实。再应用条件 (133)。作極限值

$$A_1=\lim_{k\to+0}\lim_{h\to+0} g(x+h, y-k), \quad B_1=\lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0} g(x+h, y-k),$$

并証明 $A_1=B_1$。設 $0<h_1<h$，$0<k_1<k$，可以依 (133) 写成

$$g(x+h, y-k_1)-g(x+h, y-k)-g(x+h_1, y-k_1)+$$
$$+g(x+h_1, y-k)\geqslant 0。$$

首先令 h_1 趋于零，然后再令 k_1 趋于零，可得

$$g(x+h, y-0)-g(x+h, y-k)-A_1+g(x+0, y-k)\geqslant 0。$$

現在再首先令 h 趋于零，然后令 k 趋于零，可得 $B_1-A_1\geqslant 0$，就是說 $B_1\geqslant A_1$。同样可以証明，$A_1\geqslant B_1$，所以 $A_1=B_1$。我們用 $g(x+0, y-0)$ 表示量 $A_1=B_1$。完全同样可知

$$\lim_{k\to+0}\lim_{h\to+0} g(x-h, y+k)=\lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0} g(x-h, y+k),$$

而将这一重复極限值表示成 $g(x-0, y+0)$。不难証明，在上面所考察的四个情形中，当任意地同时令 h 及 k 趋向于 $+0$ 时也得同样的極限值。例如可以証明：对于任意預給的正数 ε，必存在一正数 η，使当

$$0<h<\eta,\ 0<k<\eta \text{ 时}$$

$$|g(x+h, y-k)-g(x+0, y-0)|\leqslant\varepsilon。$$

如此，当 (133) 满足时，記号 $g(x\pm0, y\pm0)$ 有确定的意义。借助 $g(x, y)$ 可以作一非負、加法的、正常的函数 $G(\Delta)$ 如下。設 Δ_x 及 Δ_y 是坐标軸上的区間，这两区間决定了平面上的区間 Δ，而設 a 及 b 是区間 Δ_x 的端点，c 与 d 是 Δ_y 的端点。如此 $G(\Delta)$ 等于下面的式子：

$$g(b\pm0, d\pm0)-g(b\pm0, c\pm0)-$$
$$-g(a\pm0, d\pm0)+g(a\pm0, c\pm0),$$

而符号的取擇是依照下面的規定：当区間在右端是閉的，或在左端是开的，則取＋号；而当区間在右端是开的，或在左端是閉的，則取－号。如此，例如在閉区間的情形：$a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$，則：

$$G(\Delta)=g(b+0, d+0)-g(b+0, c-0)-$$
$$-g(a-0, d+0)+g(a-0, c-0)。$$

在半开区間 $a<x\leqslant b$, $c<y\leqslant d$ 的情形，

$$G(\Delta)=g(b+0, d+0)-g(b+0, c+0)-$$
$$-g(a+0, d+0)+g(a+0, c+0),$$

而在点 $x=a$, $y=c$ 的情形：

$$G(\Delta)=g(a+0, c+0)-g(a+0, c-0)-$$
$$-g(a-0, c+0)+g(a-0, c-0)。$$

反之，如果有一函数 $G(\Delta)$，那末容易作一点函数 $g(x, y)$，而用它

依上述方式得出 $G(\Delta)$ 来。例如設 $G(\Delta)$ 定义于整个开平面上。如此可設 $g(x, y)$ 等于区間 Δ_{xy} 上 $G(\Delta)$ 的値，而 Δ_{xy} 是由下面两个軸上的区間定义的：$-\infty<x'\leqslant x$，$-\infty<y'\leqslant y$。如此作的 $g(x, y)$ 是依 x 及 y 右連續的。注意 (133) 的左边不变，如果对于 $g(x, y)$ 加上一个 x 及 y 的一次多項式的話。注意，如果 $g(x, y)$ 是連續函数，那末与它相应的 $G(\Delta)$ 既无間断点又无間断綫，逆命題也成立。如果在点 (x, y) 处，函数 $g(x, y)$ 有間断，但

$$g(x+0, y+0)-g(x-0, y+0)-g(x+0, y-0)+\\+g(x-0, y-0)=0,$$

那末这点不是 $G(\Delta)$ 的間断点。

作为例子，考察上面說过的一种質量分布，即設質量分布于綫段 $x=1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上，其綫性密度是 1。如此則当 $x<1$ 或 $y<0$ 时，$g(x, y)=0$；而当 $x\geqslant 1$ 而 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时 $g(x, y)=y$；当 $x\geqslant 1$ 而 $y>1$ 时 $g(x, y)=1$。

完全同样地可以考察三維空間中的区間，其坐标軸为 X，Y，Z。如此的区間由軸上的三个区間来定义。除掉平行于軸的綫及点以外，还須考察平行于坐标平面的平面。此外則一切推理法及結果都与上面的一样。

24. 平面上的斯提勒杰斯积分　不难把斯提勒杰斯积分的概念推广到平面的情形在此我們必須論及把二維区間分成部分的問題。如果 Δ 是某一平面区間，由坐标軸上的 Δ_x 及 Δ_y 定义，那末我們所謂 Δ 的某一分割，是指把 Δ 分成部分区間，而这分法由 Δ_x 及 Δ_y 的分割成部分区間而得。Δ 的每个部分区間是由 Δ_x 的一个部分区間及 Δ_y 的一个部分区間而定的。在圖 1 上所画的是把半开区間分成六个部分区間，而分法正是依上述方式来作的。

在圖 2 上所画的是完全另一种分法。在这分法中分割綫界于区間 Δ 的中間，而并不能依上述方式借区間 Δ_x 及 Δ_y 的分割法得

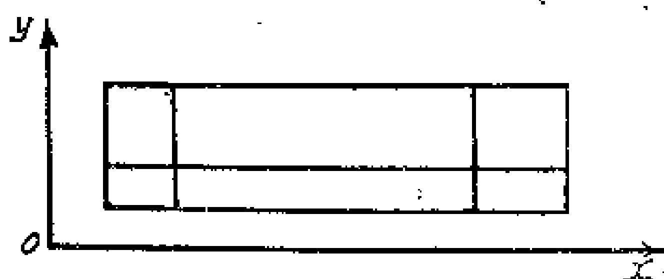


圖 1.

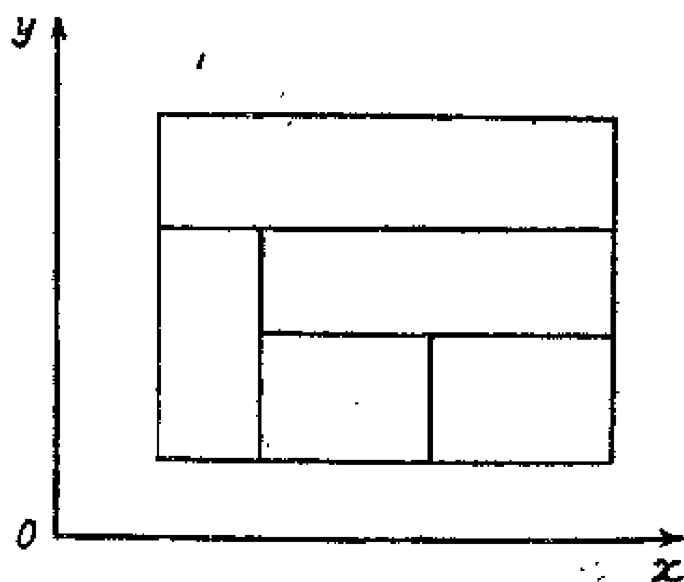


圖 2.

出。但很容易从第二类的分割法轉化成第一类分割法，只須引長一切分割綫，所以在以后只应用第一种的分割法，这并不引进重大的限制。分割 δ' 叫做分割 δ 的后繼，是指与 δ' 相应的 Δ_x 及 Δ_y 分割各是与 δ 相应的 Δ_x 及 Δ_y 的分割的后繼。如果 δ_1 及 δ_2 是 Δ 的两个分割，而 $\delta_x^{(1)}$ 及 $\delta_x^{(2)}$，$\delta_y^{(1)}$ 及 $\delta_y^{(2)}$ 各是与此相应的 Δ_x 及 Δ_y 的分割，則所謂积 $\delta_1\delta_2$ 是指由区間 Δ_x 上的分割 $\delta_x^{(1)}\delta_x^{(2)}$ 与 Δ_y 上的分割 $\delta_y^{(1)}\delta_y^{(2)}$ 所定义的分割。分割 $\delta_1\delta_2$ 显然是分割 δ_1 及 δ_2 的后繼。还要注意，如果 Δ' 是屬于 Δ 的区間，那末必存在 Δ 的一个分割，在这分割中 Δ' 恰好是一个部分区間。

在平面、三維空間及一般 n 維空間的情形中不难作与斯提勒

杰斯积分相类似的概念。現在只考察平面的情形。在其他情形中作法完全一样。

設在平面上給出一个有界区間 $\Delta^{(0)}$，在它之上定义一个一致連續的有界点函数 $f(P)$ 及一个非負、加法、正常的区間函数 $G(\Delta)$。設 δ 是 $\Delta^{(0)}$ 的一分割，分它成为互无公点的部分区間 Δ_1, Δ_2, $\cdots$, Δ_n。在每一 Δ_k 中取一点 P_k，并作和

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)G(\Delta_k)。\tag{134}$$

与在 [4] 中完全一样，可以証明当諸区域 Δ_k 的直徑中的最大者趋向于零时，这和有一确定的極限。这極限叫做 $f(P)$ 依 $G(\Delta)$ 的积分：

$$\int_{\Delta^{(0)}} f(P)G(d\Delta)=\lim \sum_{k=1}^{n} f(P_k)G(\Delta_k)。\tag{135}$$

如果，比如說，$\Delta^{(0)}$ 是半开区間，那末可以只使用分成半开部分区間的分割。設 $g(x, y)$ 是与 $G(\Delta)$ 相应的右連續函数，而 $\Delta^{(0)}$ 是由不等式

$$a_1<x\leqslant b_1,\ a_2<y\leqslant b_2$$

定义的。把这两区間分割：

$$a_1=x_0<x_1<\cdots<x_{p-1}<x_p=b_1;$$

$$a_2=y_0<y_1<\cdots<y_{q-1}<y_q=b_2,$$

而令 $f(P)=f(x, y)$，可以把和 (134) 写成下面的形式：

$$\sigma_\delta=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{q-1} f(\xi_k,\eta_l)[g(x_{k+1}, y_{l+1})-g(x_k, y_{l+1})-g(x_{k+1}, y_l)+ +g(x_k, y_l)],$$

而 $x_k<\xi_k\leqslant x_{k+1}$, $y_l<\eta_l\leqslant y_{l+1}$。与在 [4] 中完全一样，可以証明如果 $f(P)$ 在 $\Delta^{(0)}$ 内部連續并有界，而 $G(\Delta)$ 滿足下面所述的补充条件时，斯提勒杰斯积分必存在。

設 $\Delta^{(n)}$ 是位于 $\Delta^{(0)}$ 内部的閉区間，并且逐漸扩大，趋向于 $\Delta^{(0)}$，

使 $\varDelta^{(0)}$ 的任意一个内点必落于一个 n 足够大的 $\varDelta^{(n)}$ 之中。我們要求 $G(\varDelta^{(n)})\to G(\varDelta^{(0)})$。这与我們在 [4] 中所述 $g(x)$ 在区間端点連續的假設相似。

斯提勒杰斯积分也可以定义于整个平面 $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ 上,后者我們表示做 Q。設 $G(\varDelta)$ 是对凡屬于 Q 的有穷及无穷区間定义的非負、加法、正常函数。設 $\varDelta^{(n)}$ 是一序列区間,无限地依一切方向扩展,例如設 $\varDelta^{(n)}$ 是 $-n\leqslant x\leqslant n$, $-n\leqslant\leqslant y\leqslant n$。由于 $G(\varDelta)$ 的正常性,可知 $G(\varDelta^{(n)})\to G(Q)$。如果 $f(P)$ 在 Q 中連續并有界,那末存在斯提勒杰斯积分 (135)。此时,分割序列的取法必須使对于任意固定的 n,与 $\varDelta^{(n)}$ 有公共点的区間的最大直徑趋近于零。

积分区域也可以不是区間 $\varDelta^{(0)}$,而是可以表示成有穷多个区間之和的某一区域 S。我們可以將諸区間任意精細地分割,作和 (134),而取極限值。在 S 上的积分于是化成在 S 所分成諸区間上积分之和;而显然与 S 分成区間的方式无关。

二維斯提勒杰斯积分的性質与以前講过的單积分的性質完全类似。我們証明与 [9] 中的公式 (59) 相似的公式。設 $f_0(P)$ 与 $f(P)$ 在 $\varDelta^{(0)}$ 中一致連續并且有界,而 $f_0(P)\geqslant 0$,并且 $G(\varDelta)$ 与上述的一样。設 $\varDelta$ 是屬于 $\varDelta^{(0)}$ 的任意区間。区間函数

$$G_0(\varDelta)=\int_{\varDelta} f_0(P)G(d\varDelta)$$

显然是在 $\varDelta^{(0)}$ 中非負的、加法的、正常的。公式

$$\int_{\varDelta^{(0)}} f(P)G_0(d\varDelta)=\int_{\varDelta^{(0)}} f(P)f_0(P)G(d\varDelta) \tag{136}$$

成立。

事实上,相应于左边积分的和 σ_δ 的形式是:

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{p} f(P_k)\int_{\varDelta_k} f_0(P)G(d\varDelta)。 \tag{137}$$

可以写出

$$\int_{\Delta_k} f_0(P)G(d\Delta)=f_0(P_k)G(\Delta_k)+\int_{\Delta_k}[f_0(P)-$$
$$-f_0(P_k)]G(d\Delta)。\qquad (138)$$

旣然 $f_0(P)$ 是一致連續的,可知

$$\left|\int_{\Delta_k}[f_0(P)-f_0(P_k)]G(d\Delta)\right|\leqslant\int_{\Delta_k}|f_0(P)-$$
$$-f_0(P_k)|G(d\Delta)\leqslant\varepsilon G(\Delta_k),$$

其中当諸 Δ_k 的直徑中最大者趋向于零时，$\varepsilon\to 0$。 将 (138) 代入 (137)，可得

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)f_0(P_k)G(\Delta_k)+\eta,$$

而
$$|\eta|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}|f(P_k)|G(\Delta_k),$$

由此可知 $\eta\to 0$，而取上面公式的極限值可得 (136)。 关于在积分号下取極限值的定理仍然正确。

注意，在一維的情形中我們关于基本区間的一个分割点究屬于那一个部分区間的問題并不詳究，而在不減函数 $g(x)$ 的情形中，对于无論开或閉的区間 α,β 都以差值 $g(\beta)-g(\alpha)$ 做为其長。这对于在[4]中定义的积分并无关紧要。

最后，我們举出二維斯提勒杰斯积分应用的几个例子。 設 C 是在有穷閉区間 $\Delta^{(0)}$ 上的連續函数的空間。如在 [15] 中一样，可以定义 C 中的綫性泛函，而这种泛函的一般形式可表成斯提勒杰斯积分：

$$\Phi[f(P)]=\iint_{\Delta^{(0)}} f(P)G(d\Delta)。$$

設在有穷閉区間 $\Delta^{(0)}$ 上分布有質量，而函数 $G(\Delta)$ 是位是区間 Δ 上的質量总量。如果 r 表示由点 M 到区間 $\Delta^{(0)}$ 中的变点 N 的距离，那末所述的質量在位于 $\Delta^{(0)}$ 外部的点 M 处的对数势由下面公式决定：

$$u(M)=\iint_{\Delta^{(0)}}\lg\frac{1}{r}G(d\Delta)。$$

同样可以定义三維空間中的牛頓势。注意在如此定义势时我們不用密度概念，而只用决定質量分布的非負、加法、正常函数 $G(\Delta)$。如果点 M 屬于 $\Delta^{(0)}$，那末問題还有待进一步的討論，但我們不再深入了。

25．平面上的基本与一般积分 作平面上的基本与一般积分与在一維情形中一样。設在区間 Δ_0 中已知一有界点函数 $f(P)$，及一非負、加法、正常的区間函数 $G(\Delta)$。設 δ 是分 Δ_0 为部分区間 $\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, \cdots, \Delta_0^{(n)}$ 的一种分割，而 m_k 与 M_k 是 $f(P)$ 在 $\Delta_0^{(k)}$ 中諸值的下确界及上确界，P_k 是 $\Delta_0^{(k)}$ 中某一点。作和

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n} m_k G(\Delta_0^{(k)})\text{；}S_\delta=\sum_{k=1}^{n} M_k G(\Delta_0^{(k)})\text{；}\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(P_k) G(\Delta_0^{(k)})\text{。}\qquad(139)$$

用 i 表示和 s_δ 的上确界，I 表和 S_δ 的下确界。如果 $i=I$，那末我們說 $f(P)$ 依 $G(\Delta)$ 可积分，而 i 是这积分的值。如果 Δ_0 是半开区間，而在作和时我們只使用分成半开部分区間的分割，那末得出基本积分。如果 Δ_0 是任意区間，而我們把它分割成任意区間，則得一般积分。

在 [18] 中所講的一切无須变动就可以适用于和 (139)。定理 1 对于基本积分及一般积分都仍有效。所謂对于基本积分的正則分割序列是指一序列 δ_n，使函数 $G(\Delta)$ 的任意間断綫 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 也同时是从某一 n 值以后的一切 δ_n 的分割綫，而此外，当 n 增大时諸分割 δ_n 无限地細分。在一般积分的情形中第一条件必須换成下面的：每一間断綫是从某一 n 值以后的一切 δ_n 的分割綫，而在其上的每一間断点算做从某一 n 以后一切 δ_n 中的独立分割元素。定理 2 及 3 及其系 [18] 在平面的情形也成立。

注意在无穷区間的情形中，无限地細分部分区間变成了下面的情形：对于任意預定的正数 A 及正数 ε，必存在一个数 N，使当 $n>N$ 时凡与区間 $-A\leqslant x\leqslant A$ 及 $-A\leqslant y\leqslant A$ 有公点而屬于 Δ_x 及 Δ_y 的部分区間之長必 $\leqslant\varepsilon$。依 $G(\Delta)$ 的可积分性与同时依 $G_d(\Delta)$ 及依 $G_c(\Delta)$ 可积分性同效。在一般积分的情形中任意有界函数 $f(P)$ 依 $G_d(\Delta)$ 是可积分的。依 $G_c(\Delta)$ 可积分性的必要且充分的条件可以陈述如下：对于任意預定的正数 ε，可以用有穷多或可数无穷多个区間 Δ_k 复蓋 $f(P)$ 的間断点，使 $\sum_k G_c(\Delta_k)\leqslant\varepsilon$。

26．平面上的囿变函数 关于平面上囿变函数的考察大体与以前一样。但其陈述則稍有不同，因为我們不使用点函数的說法，而用区間函数的說法。設 $G(\Delta)$ 是加法的正常的区間函数，对于

凡屬于某一基本区間 Δ_0 的区間（依最一般的意义）定义。这函数并不假設为非負的。設 $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ 是分 Δ_0 为部分区間的某一分割 δ。作和

$$t_\delta = \sum_{k=1}^{n} |G(\Delta_k)|。 \tag{140}$$

定义 如果对于一切可能的分割 δ，这和总是有界的，那末函数 $G(\Delta)$ 叫做在区間 Δ_0 上囿变的函数，而这些和 t_δ 的上确界叫做 $G(\Delta)$ 在区間 Δ_0 上的全变分或簡称变分。我們用記号 $V_{\Delta_0}(G)$ 表示之。和 t_δ 与全变分的性質与我們在 [8] 中所論的諸性質完全相似，我們只叙述这些性質而不加証明。

如果 δ' 是分割 δ 的后繼，那末 $t_{\delta'} \geqslant t_\delta$。如果 $G(\Delta)$在 Δ_0 上是囿变的，那末它在任意屬于 Δ_0 的区間 Δ' 上也是囿变的，而 $V_{\Delta'}(G) \leqslant \leqslant V_{\Delta_0}(G)$。任意非負的或非正的函数 $G(\Delta)$ 是囿变函数。如果区間 Δ' 屬于 Δ_0，那末下面不等式成立：

$$|G(\Delta')| \leqslant V_{\Delta_0}(G), \tag{141}$$

而在 Δ_0 中囿变的函数 $G(\Delta)$ 对于凡屬于 Δ_0 的区間 Δ（依絕对值）是有界的。凡囿变函数的綫性組合式都是囿变函数。[8] 中关于积与商的定理 3 仍正确。全变分 $V_\Delta(G)$ 是定义于 Δ_0 中的某一非負函数。重复 [8] 中定理 4 的証明可以証明 $V(\Delta) = V_\Delta(G)$ 是加法的。再証明函数 $V(\Delta)$ 是 Δ_0 上的正常函数。設 $\Delta_m (m=1, 2, 3, \cdots)$ 是零区間序列。必須証明，$V(\Delta_m) \to 0$。設 ε 是預定的正数。取 Δ_0 的一分割 $\delta: \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \cdots, \Delta^{(p)}$，使

$$\sum_{k=1}^{p} |G(\Delta^{(k)})| \geqslant V(\Delta_0) - \varepsilon。 \tag{142}$$

对于数列 $k=1, 2, \cdots, p$ 中的任意 k，积 $\Delta_m \Delta^{(k)} (m=1, 2, \cdots)$ 是零序列。既然 $G(\Delta)$ 是正常的，可以固定数 $m=m_0$，使当 $m>m_0$ 时，

$$|G(\Delta_m\Delta^{(k)})|\leqslant\frac{\varepsilon}{p}\quad(k=1,2,\cdots,p)。\tag{143}$$

固定任意的 $m>m_0$。把每个区間 $\Delta^{(k)}$ 分割，使 $\Delta_m\Delta^{(k)}$ 是它的一个部分区間。設 $\Delta_s^{(k)}(s=1,2,\cdots,n_k)$ 是在 $\Delta^{(k)}$ 的这个分割中所余的諸部分区間。如此得出 Δ_0 的一分割，这分割是 δ 的一个后繼，所以，对于这分割，不等式 (142) 更滿足：

$$\sum_{k=1}^{p}|G(\Delta_m\Delta^{(k)})|+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n_k}|G(\Delta_s^{(k)})|\geqslant V(\Delta_0)-\varepsilon。$$

由于 $V(\Delta)$ 的加法性及不等式 $|G(\Delta_s^{(k)})|\leqslant V(\Delta_s^{(k)})$，由上面不等式可得

$$\sum_{k=1}^{p}|G(\Delta_m\Delta^{(k)})|+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n_k}V(\Delta_s^{(k)})\geqslant V(\Delta_m)+\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n_k}V(\Delta_s^{(k)})-\varepsilon$$

就是説当 $m>m_0$ 时

$$V(\Delta_m)\leqslant\sum_{k=1}^{p}|G(\Delta_m\Delta^{(k)})|+\varepsilon。$$

注意 (143)，当 $m>m_0$ 时，得

$$V(\Delta_m)\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{\varepsilon}{p}+\varepsilon=2\varepsilon。$$

由此，并注意 ε 是任意的，可得 $V(\Delta_m)\to0$。如此 $V(\Delta)$ 是 Δ_0 上的非負、加法、正常的区間函数。再用下面公式定义两个非負、加法、正常函数：

$$\begin{aligned}G_1(\Delta)&=\frac{1}{2}[V(\Delta)+G(\Delta)];\\G_2(\Delta)&=\frac{1}{2}[V(\Delta)-G(\Delta)],\end{aligned}\tag{144}$$

如此得出囿变函数 $G(\Delta)$ 表示成两个非負加法正常函数之差的典式：

$$G(\Delta)=G_1(\Delta)-G_2(\Delta)。\tag{145}$$

如果有另一相似的表示法：

$$G(\varDelta)=G_1^*(\varDelta)-G_2^*(\varDelta), \tag{146}$$

那末对于屬于 $\varDelta_0$ 的任意 $\varDelta$，可得

$$G_1(\varDelta)\leqslant G_1^*(\varDelta),\ G_2(\varDelta)\leqslant G_2^*(\varDelta)。$$

反之，如果 $G(\varDelta)$ 是两个非負、加法、正常函数之差，那末 $G(\varDelta)$ 是囿变函数。

如果区間 $\varDelta$ 是点 P，那末 $V(P)$ 与 $G(P)$ 相同。如果 $G(P)=0$，那末 $V(P)=0$，就是說如果 $G(\varDelta)$ 在某点处連續，則 $V(\varDelta)$ 在这点也是連續的。关于平行于坐标軸的綫段，情形比較复杂。把 $G(\varDelta)$ 看做分布于区間 $\varDelta$ 上的电荷。如果在平行于一个坐标軸的直綫的某綫段 l 上，分布有电荷，其綫性密度是确定的，而其总和等于零，那末 $G(l)=0$。另一方面，$V(l)>0$，因为 $V(l)$ 是当所有电荷都换成同值的正电荷时的电荷总量。

可以只在半开区間上定义加法正常函数 $G(\varDelta)$，并应用只分成半开区間的分割。如此可以引用上述的一切推理而得公式(145)。半开区間的非負、加法、正常函数 $G_1(\varDelta)$ 及 $G_2(\varDelta)$ 可以推广到一切可能的区間之上，而公式(145)使我們可以推广已知函数 $G(\varDelta)$ 于一切可能的区間之上，并且这函数仍是加法的、正常的、对于一切可能区間是囿变的。

应用典式(145)可以依通常方式定义依 $G(\varDelta)$ 的积分：

$$\int_{\varDelta^{(0)}} f(P)\,G(d\varDelta)=\int_{\varDelta^{(0)}} f(P)G_1(d\varDelta)-\int_{\varDelta^{(0)}} f(P)G_2(d\varDelta)。\tag{147}$$

与在一維情形中完全一样，也可以定义基本的及一般的斯提勒杰斯积分。在作正則的分割序列时，間断綫是依函数 $V(\varDelta)$ 决定的。

27. 傅立叶-斯提勒杰斯积分 考察由傅立叶-斯提勒杰斯积分表示的函数

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dg(x)\quad(-\infty<t<+\infty), \tag{148}$$

而 $g(x)$ 是一非負有界的函数，并在 $x=\pm\infty$ 处連續，就是說

$$g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} g(x);\ g(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} g(x)。$$

积分(148)显然存在，因为函数 e^{itx} 是連續而有界的 [4]。現在討論函数 $\varphi(t)$ 的最簡單性質。

$$|\varphi(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{itx}|dg(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}dg(x)=g(+\infty)-g(-\infty)=\varphi(0),$$

即 $|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)$，就是說 $\varphi(t)$ 是有界函数。由公式 (148) 直接可得恒等式

$$\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}。\tag{149}$$

还要証明函数 $\varphi(t)$ 在区間 $(-\infty,\ +\infty)$ 上是一致連續的。估計一下差 $\varphi(t+h)-\varphi(t)$ 的絕对值：

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{ixt}|\,|e^{ixh}-1|\,dg(x)=$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|dg(x).\tag{150}$$

首先固定足够大的 n 值，使

$$2[g(-n)-g(-\infty)]\leqslant\varepsilon;\ 2[g(+\infty)-g(n)]\leqslant\varepsilon。$$

再固定与 t 无关的 η，使在区間 $-n\leqslant x\leqslant n$ 上，下面不等式成立：当 $|h|\leqslant\eta$ 时

$$2\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\leqslant\varepsilon。$$

如此，由 (150)，可得

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant[2+g(n)-g(-n)]\varepsilon\leqslant[2+g(+\infty)-g(-\infty)]\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，而 η 与 t 无关，可知 $\varphi(t)$ 是一致連續的。再举函数 $\varphi(t)$ 的一个性質。取某 m 个实数 $t_1,\ t_2,\cdots,\ t_m$，并作变数 ξ_s 的埃尔密脫式：

$$\sum_{p,q=1}^{m}\varphi(t_p-t_q)\,\xi_p\bar{\xi}_q\tag{151}$$

注意 (148)，可以写成

$$\varphi(t_p-t_q)\,\xi_p\bar{\xi}_q=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it_px}\,\xi_p\,\overline{e^{it_qx}\xi_q}\,dg(x),$$

而埃尔密脫式 (151) 变成下列形式：

$$\sum_{p,q=1}^{m}\varphi(t_p-t_q)\,\xi_p\bar{\xi}_q=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{s=1}^{m}e^{it_sx}\xi_s\right|^2dg(x),$$

由此直接可知，对于任意 m 及 t 値 t_s 的任意选擇，埃尔密脫式(151)是非負的，就是說

$$\sum_{p,q=1}^{m}\varphi(t_p-t_q)\xi_p\bar{\xi}_q\geqslant 0。\tag{152}$$

介紹一新概念。函数 $\varphi(t)$ 叫做正定的，是指它是在区間 $(-\infty,\ \infty)$ 中連續而有界的，并滿足恒等式 (149)，而此外埃尔密脫式 (151) 对于任意的 m 及任意选擇的点 t_r 都取非負值。由上面的推理可知如果函数 $\varphi(t)$ 可借不減有界函数 $g(x)$ 表成傅立叶-斯提勒杰斯积分，那末它是正定的。可以証明，反之：凡正定函数 $\varphi(t)$ 必可借一不減有界函数 $g(x)$ 表示成积分 (148) 的形式（參考 Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 74 頁，或 Math. Annal. Bd. 108）。回到积分 (148)，并把函数 $g(x)$ 表示成和：$g(x)=g_d(x)+g_c(x)$，而 $g_d(x)$ 是函数 $g(x)$ 的跃度函数，$g_c(x)$ 是 $g(x)$ 的連續部分。如此函数 $\varphi(t)$ 可以表示成和的形式：$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$，而

$$\varphi_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dg_d(x);\quad \varphi_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dg_c(x)。\tag{153}$$

設 $x_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 是 $g(x)$ 的諸間斷点的横坐标，而 $a_k=g(x_k+0)-g(x_k-0)$，那末，显然 $a_k>0$，而由 a_k 形成的級数收斂。$\varphi_1(t)$ 于是可以展开成一致收斂的級数：

$$\varphi_1(t)=\sum_k a_k e^{ix_k t}。\tag{154}$$

如果点 x_k 的总数有穷，那末上式中的和是有穷的。

現在介紹所謂一定义于区間 $(-\infty,\ +\infty)$ 的連續函数 $F(t)$ 的中値：如果下面式中右边的極限存在，則这中値定义为

$$M\{F(t)\}=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}F(t)\,dt,\tag{155}$$

不难証明，对于借公式 (153) 由連續函数 $g_c(x)$ 定义的函数 $\varphi_2(t)$，

$$M\{\varphi_2(t)\}=0。\tag{156}$$

事实上，在积分号下积分，可得

$$\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega x}\,dg_c(x)。$$

分解积分区間 $[-\infty,\ +\infty]$ 成三部分：$[-\infty,\ -a]$，$[-a,\ +a]$，及 $[a,\ +\infty]$。对积分値作一初步估計，可得

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_2(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{a\omega}\left[g_c(-a)-g_c(-\infty)\right]+$$
$$+\frac{1}{a\omega}\left[g_c(\infty)-g_c(a)\right]+\left[g_c(a)-g_c(-a)\right]。$$

数 ε 是預定的正数。由于 $g_c(x)$ 在 $x=0$ 处是連續的，可以取 a 足够小，使 $g_c(a)-g_c(-a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。固定 a，上式右边前两项当 $\omega\to\infty$ 时趋向于零；所以对于足够大的 ω 值，可得

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_2(t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，可得 (156)。在斯提勒杰斯积分号下依 t 积分的可能性很容易証实。現在考察函数 $\varphi_2(t)e^{-i\lambda t}$，我們可以把它写成下式：

$$\varphi_2(t)e^{-i\lambda t}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(x-\lambda)t}dg_c(x),$$

而应用积分变数的更换，可得

$$\varphi_2(t)e^{-i\lambda t}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dg_c(x+\lambda),$$

而既然 $g_c(x)$ 是連續函数，对于任意的实数 λ，可得

$$M\{\varphi_2(t)e^{-i\lambda t}\}=0。$$

再应用級数 (154) 在区間 $(-\infty,+\infty)$ 中的一致收斂性，以及公式

$$M\{e^{i\lambda t}\}=0,\ \text{如果}\ \lambda\neq 0,$$

可得

$$M\{\varphi_1(t)e^{-i\lambda_k t}\}=a_k,\ (\lambda_k=x_k),$$

$$M\{\varphi_1(t)e^{-i\lambda t}\}=0,$$

如果 λ 不等于任何 x_k。由上面推理可得下面的一般結果：如果 $\varphi(t)$ 借不减有界函数 $g(x)$ 表示成积分式(148)，那末 $M\{\varphi(t)e^{-i\lambda t}\}=g(\lambda+0)-g(\lambda-0)$，而如果 λ 不是 $g(x)$ 的間断点，則右边等于零。积分 $\varphi(t)e^{-i\lambda t}$ 的中值是周期函数的傅立叶系数概念的推广。在 [29] 中講到一般的封閉性公式时还要回到推广的傅立叶系数。在下节中，我們介紹积分 (148) 的反演公式，就是說用 $\varphi(t)$ 表示 $g(x)$ 的公式。

28. 反演公式 在第二卷中，曾証明关于中值的第二定理，并在所研究的函数滿足狄义赫利条件的假設下，展开函数为傅立叶級数及傅立叶积分。如果把狄义赫利条件换成"函数是囿变的"这一条件，那末由那証明可以看出上面所述的命題仍然有效。因而对于傅立叶积分有下面的結果：如果 $f(x)$ 在任意有穷区間上都是囿变函数，并在无穷区間上依黎曼的意义絕对可积，那末由公式

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{itx}dx, \tag{157}$$

可得下面的反演公式：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-itx}dt, \tag{158}$$

而右边的积分必須了解为主值，左边的 $f(x)$ 在間断点处必須换成 $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$。这結果有时写成別的形式，就是說，由公式

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{itx}dx \tag{159}$$

可得 [III;130]

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\,vp\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-itx}dt=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\varphi(t)e^{-itx}dt。 \tag{160}$$

我們的問題是就積分 (148) 作反演公式。不难看出这公式应当采取什么形式。我們使用下面的啓發式方法，不过这方法并无証明的效力。在積分 (148) 中把 $dg(x)$ 換成 $g'(x)dx$，而設 $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数。如此可得

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g'(x)e^{itx}dx,$$

而依平常傅立叶積分的反演公式可得

$$g'(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\varphi(t)e^{-itx}dt。$$

把上式两边依 x 積分，例如从 0 到某值 x，而右边在积分号下积分，最后可得下面反演公式：

$$g(x)-g(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\varphi(t)\frac{1-e^{-itx}}{it}dt。 \tag{161}$$

在左边有 $g(x)$ 在定点 $x=0$ 处的值，因为函数 $g(x)$ 中显然包含一个不确定的常数項。現在回来严格地証明公式 (161)。

以某种方式固定变数 x 的值，考察下面变数 y 的函数：

$$h(y)=g(y+x)-g(y)。 \tag{162}$$

$h(y)$ 既然是两个增函数的差，它在任意有穷区間上都是囿变函数。还要証明它在无穷区間上絕对可積。为确定起見令 $x>0$。在 $x<0$ 时，証明完全一样。留意函数 $g(y)$ 是增的，可以写出：

$$\int_p^q|h(y)|dy=\int_p^q[g(y+x)-g(y)]dy\underset{(q>p)}{=}\int_p^q g(y+x)dy-\int_p^q g(y)dy, \tag{163}$$

而在第一积分中使用积分变数代换 $y+x=z$，可得

$$\int_p^q|h(y)|dy=\int_{p+x}^{q+x}g(z)dz-\int_p^q g(z)dz=\int_q^{q+x}g(z)dz-\int_p^{p+x}g(z)dz。$$

留意在第一区間$[p, p+x]$中，$g(p)\leqslant g(z)$，而在区間$[q, q+x]$中$g(q+x)\geqslant g(z)$，可得

$$\int_p^q |h(y)|dy\leqslant[g(q+x)-g(p)]x。$$

由此可以看出对于足够大的p値及任意$q>p$，积分(163)可以成为任意小，于是証明了函数$h(y)$在无穷区間上依絕对値可积分。如此对于函数(162)应用傅立叶公式:

$$g(y+x)-g(y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}e^{-ity}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]e^{itz}dz\right]dt,$$

而当$y=0$:

$$g(x)-g(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]e^{itz}dz\right]dt。\tag{164}$$

考察里边的积分I，并对于它使用分部积分公式:

$$I=\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]de^{itz}=-\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itz}d[g(z+x)-g(z)],$$

由此，引用公式(148)，可得

$$I=\frac{1}{it}\varphi(t)-\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itz}dg(z+x)。$$

在上面积分中使用积分变数代换$z+x=u$，可得下面公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[g(z+x)-g(z)]e^{itz}dz=\frac{1-e^{-itx}}{it}\varphi(t)。\tag{165}$$

代入公式(164)，可得反演公式(161)。

注意，在表現平常傅立叶变换的反演的公式(160)中，如所已知[II; 143]，必須設左边的$f(x)$在其間断点处等于其左右極限的算术中項。所以在公式(164)的左边及反演公式(161)的左边也是如此。当$g(x)$是有界变函数时，积分(148)的反演公式(161)也是正确的。为了証明这点，只須把$g(x)$表示成两个增函数之差，把积分(148)分解成两个积分，并对于每个积分引用上面証明的反演公式。

29. 折合定理 我們知道，平常傅立叶积分的反演公式与拉卜拉斯积分的反演公式是直接联系着的[IV; 69, 70]。对于后一种积分，有一对于应用很重要的折合定理。現在对于傅立叶-斯提勒杰斯积分証明一类似定理。設$h_1(x)$及$h_2(x)$是在无穷区間$(-\infty, +\infty]$上两个右連續有界增函数，并設它在这区間的右端$x=+\infty$处是連續的。对于任意t，函数$h_2(t+x)$也具有

上述那些性質，而在 [20] 中已經見到，下面的基本斯提勒杰斯积分存在：

$$h_3(t)=\int_{(-\infty,-\infty]}h_2(t-x)\,dh_1(x)。\qquad (166)$$

这种形式的积分在概率論中就会遇到。設 $h_1(x)$ 及 $h_2(x)$ 是独立随机变量 u_1 及 u_2 的分布函数，就是說，例如 $h_1(x)$ 是随机变量 u_1 遵守不等式 $-\infty<u_1\leqslant\leqslant x$ 的概率。这时由公式 (166) 定义的函数 $h_3(x)$ 乃是和 u_1+u_2 的分布函数。由上述函数 $h_1(x)$ 及 $h_2(x)$ 的性質及公式 (166)，直接可知函数 $h_3(x)$ 是增而有界的。把函数 $h_2(x)$ 分解成跃度函数及連續部分，用与 [20] 中証明 [166] 形式的积分存在时所使用的方法一样，可証函数 $h_3(x)$ 是右連續的，而如果 $h_1(x)$ 与 $h_2(x)$ 是連續的，那末 $h_3(x)$ 也是連續的。对于函数 $h_i(x)$ 作傅立叶-斯提勒杰斯变换：

$$\psi_k(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dh_k(x)\quad(k=1,\,2,\,3)。\qquad (167)$$

折合定理乃是下面的命題：这些像函数滿足下面的簡單等式：

$$\psi_3(t)=\psi_1(t)\psi_2(t)。\qquad (168)$$

对于函数 $\psi_3(t)$ 应用公式 (165)：

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[h_3(z+u)-h_3(z)]e^{itz}dz。$$

用式 (166) 代換 $h_3(x)$，可得

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[h_2(z+u-x)-h_2(z-x)]\,dh_1(x)\right\}e^{itz}dz。$$

交換积分的次序(我們不詳証这交換的可能性。它可以由一个关于交換积分次序的一般定理得出，而这定理將在以后証明)。如此可得：

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[h_2(z+u-x)-h_2(z-x)]\,e^{itz}\,dz\right\}dh_1(x)。$$

在里边的积分中以新的积分变数 y 来換 z：$z-x=y$。这时上面的公式可以改写成：

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[h_2(y+u)-h_2(y)]e^{ity}dy\right\}e^{itx}dh_1(x)。$$

依公式 (165)，里面的积分可以表成 $\psi_2(t)$，于是得公式

$$\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_3(t)=\frac{1-e^{-iut}}{it}\psi_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dh_1(x),$$

而依 (167)，这正是公式 (168)。

由折合定理直接可知，如果 $\psi_1(t)$ 及 $\psi_2(t)$ 表成 (148) 型的积分，就是說

于正定函数类 P，那末它們的积也属于 P。显然由正系数作成的綫性組合式 $c_1\psi_1(t)+c_2\psi_2(t)$ 也属于这类。此外，如果 $\psi(t)$ 属于 P，那末 $\overline{\psi}(t)$ 属于 P，因为如果 $g_0(x)$ 决定 $\psi(t)$，那末关于 $\overline{\psi(t)}$ 可得

$$\overline{\psi(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}dg_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dg_1(x),$$

其中 $g_1(x)=-g_0(-x)$，而 $g_1(x)$ 是設在間断点处右連續的。如此 $|\psi(t)|^2$ 也属于 P，而由函数

$$h(x)=\int_{(-\infty+\infty)}g_0(x-t)\,dg_1(t)$$

决定，其中在間断点处做为 t 的函数的 $g_0(x-t)$ 是左連續的。如果 $g_0(x)$ 是連續的，那末 $h(x)$ 也是連續的，而依 [27] 中的証明，可知

$$M\{|\psi(t)|^2\}=0。$$

回到由公式 (148) 定义的函数 $\varphi(t)$，設与前边一样，a_k 是与 $\lambda=\lambda_k$ 相应的广义傅立叶系数。注意諸正数 a_k 組成收斂級数，并注意 (154)，可知

$$\sum_k|a_k|^2=M\{|\varphi_1(t)|^2\}。\tag{169}$$

另一方面，根据上面所証的，

$$M\{|\varphi_2(t)|^2\}=0。\tag{170}$$

又

$$|\varphi(t)|^2=|\varphi_1(t)+\varphi_2(t)|^2=|\varphi_1(t)|^2+|\varphi_2(t)|^2+\varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}+\overline{\varphi_1(t)}\varphi_2(t)。$$

依布尼亞科夫斯基-舒伐尔兹不等式，

$$\left|\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}\varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}\,dt\right|^2\leqslant\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}|\varphi_1(t)|^2dt\cdot\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{+\omega}|\varphi_2(t)|^2dt,$$

而留意 (169) 及 (170)，可知当无限地增大 ω 时右边趋向于零。如此 $M\{\varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}\}=0$，同样 $M\{\overline{\varphi_1(t)}\varphi_2(t)\}=0$。由公式 (169) 及 (170) 对于类 P 中的任意函数可得下面的封閉性定理：

$$\sum_k a_k^2=M\{|\varphi|^2\}。\tag{171}$$

30. 柯西-斯提勒杰斯积分

考察在全实数軸上作的柯西积分：

$$\omega(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)}{x-z}\,dx。\tag{172}$$

在关于 $\psi(x)$ 的某些条件之下，这积分存在，而复变数 z 的函数 $\omega(z)$ 在上半平面及下半平面中都是正則函数。在这些半平面

中，上述两正則函数是不同的解析函数，而我們知道，$\psi(x)$ 可以由 $\omega(z)$ 在实数軸上的跃度表示出来，就是說下面公式成立 [IV;85]：

$$\psi(x)=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{2\pi i}[\omega(x+\tau i)-\omega(x-\tau i)]。$$

設 $g(x)$ 是无穷区間 $[-\infty, +\infty]$ 上的囿变函数，而对于复数 z 作柯西-斯提勒杰斯积分：

$$\omega(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-z}dg(x)。\tag{173}$$

被积分的函数 $1:(x-z)$ 在全实数軸上是連續的，并当 $x\to\pm\infty$ 时趋向于零。如此，积分 (173) 可以看做斯提勒杰斯积分[4]。对于积分 (173) 可以証明下面的反演公式：

$$g(x)-g(0)=\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^x[\omega(\sigma+\tau i)-\omega(\sigma-\tau i)]d\sigma,\tag{174}$$

对于函数 $g(x)$ 的間断点左边必須取左右極限值之和的一半。我們可以預見这反演公式，与在論傅立叶-斯提勒杰斯积分时完全一样。

在証明公式 (174) 之前，先考察对于半平面情形的卜阿桑积分。設 $z=\sigma+\tau i$，而在柯西核中分开实数及虚数两部分：

$$\frac{1}{x-z}=\frac{x-\sigma}{(x-\sigma)^2+\tau^2}+\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}i。$$

在积分 (172) 中分开虚数部分，并添上因子 $\frac{1}{\pi}$，可得对于半平面的卜阿桑积分：

$$F(\sigma,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}\psi(x)dx。\tag{175}$$

这显然在上半平面及下半平面中都是一調和函数。关于这积分証明下面命題：如果 $\psi(x)$ 是有界的并在一切有穷区間上是依黎曼可积分的函数[例如囿变函数 $g(x)$]，那末积分 (175)（它显然存在）当 τ 从正数值方面趋向于零时在 $\psi(x)$ 的連續点处趋向于 $\psi(\sigma)$，而

在第一类間断点处趨向于其左右極限值之和的一半，并且在任意位于 $\psi(x)$ 的連續性区間内部的 σ 值閉区間中，这收斂乃是依 σ 一致的。为了証明，首先注意显然的等式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau}{x^2+\tau^2}\,dx=1。\tag{176}$$

在积分 (175) 中把 x 用新积分变数 $y=x-\sigma$ 代替：

$$F(\sigma,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{y^2+\tau^2}\psi(y+\sigma)dy。$$

把积分区間分解为二：$[-\infty, 0]$，$[0, +\infty]$，而在所得的第一积分中取新积分变数 $y_1=-y$。如此得下面的公式：

$$F(\sigma,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau}{x^2+\tau^2}\cdot\frac{\psi(\sigma+x)+\psi(\sigma-x)}{2}\,dx。\tag{177}$$

設 σ 是 $\varphi(x)$ 的連續点或第一种間断点。把公式 (176) 两边乘以 $[\psi(\sigma+0)+\psi(\sigma-0)]:2$，并由公式 (177) 逐項相減，可得下面公式：

$$F(\sigma,\tau)-\frac{\psi(\sigma+0)+\psi(\sigma-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\tau}{x^2+\tau^2}\,w(x)dx,\tag{178}$$

其中

$$w(x)=\frac{\psi(\sigma+x)-\psi(\sigma+0)}{2}+\frac{\psi(\sigma-x)-\psi(\sigma-0)}{2}。\tag{179}$$

設 ε 是預定的正数。这时存在一正数 η，使当 $0<x\leqslant\eta$ 时 $|w(x)|<\varepsilon$。如果 σ 在一个位于 $\psi(x)$ 的連續性区間内部的閉区間中，那末由于 $\psi(x)$ 的一致連續性，数 η 只由数 ε 决定，而与 σ 无关。在积分 (178) 中分割积分区間成两个 $[0, \eta]$ 及 $[\eta, \infty]$。对于第一积分区間：

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\eta\frac{\tau}{x^2+\tau^2}\,w(x)dx\right|<\varepsilon\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\eta\frac{\tau}{x^2+\tau^2}\,dx<\varepsilon\cdot$$
$$\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\tau}{x^2+\tau^2}\,dx=\varepsilon。$$

为了估計在第二区間上的积分，首先注意函数 $w(x)$ 是有界的，这是因为函数 $\psi(x)$ 有界，就是說，有一正数 L 存在，使 $|w(x)|\leqslant L$。如此得

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\eta}^{\infty}\frac{\tau}{x^2+\tau^2}w(x)dx\right|\leqslant L\cdot\frac{2}{\pi}\int_{\eta}^{\infty}\frac{\tau}{x^2+\tau^2}dx=$$

$$=\frac{2L}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\tau}\right),$$

而对于公式 (178) 左边的差，可得

$$\left|F(\sigma,\tau)-\frac{\psi(\sigma+0)+\psi(\sigma-0)}{2}\right|\leqslant\varepsilon+$$

$$+\frac{2L}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\tau}\right)。$$

第二項中的差当正数 τ 趋向于零时显然趋向于零，于是对于一切足够接近零的 τ 值，这第二項必小于 ε。如此，对于一切足够接近于零的 τ 值，可得

$$\left|F(\sigma,\tau)-\frac{\psi(\sigma+0)+\psi(\sigma-0)}{2}\right|\leqslant 2\varepsilon,$$

旣然 ε 是任意的，可知上面所述的結論是正确的。τ 和零的接近程度由 η 的值制約着，而后者对于上述那 $\psi(x)$ 的連續性区間是与 σ 无关的。由此可知在上述的連續性区間中收斂是一致的。現在回来証明反演公式 (174)。作函数

$$F_1(\sigma,\tau)=\frac{1}{2\pi i}[\omega(\sigma+\tau i)-\omega(\sigma-\tau i)]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}dg(x)。$$

使用分部积分法，可得

$$F_1(\sigma,\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\tau}{(x-\sigma)^2+\tau^2}\right)dx。$$

既然 $g(x)$ 是有界的，上面的广义积分依属于任意有穷区间的 σ 一致收敛，而依 σ 在区間 $[0, x_0]$ 上积分上式的两边，并且右边在积分号下取积分，可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{x_0}[\omega(\sigma+\tau i)-\omega(\sigma-\tau i)]d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{(x-x_0)^2+\tau^2}g(x)dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{x^2+\tau^2}g(x)dx。$$

右边的积分是卜阿桑积分，而应用上面証明了的定理可得反演公式 (174)。这公式首先是由斯提勒杰斯提出的，平常叫做斯提勒杰斯公式。留意对于积分 (173) 函数 $g(x)$ 在区間 $[-\infty, +\infty]$ 两端的值无关宏旨，因为被积分的函数当 $x\to\pm\infty$ 时趋向于零。

第二章　集合函数与勒貝格积分

§1. 集合函数与测度論

31. 集合的运算　在树立更一般的积分概念时，我們将把积分的基本区間不分成区間，而分成更一般型的点集合。此外，有时积分的基本区域也不是区間，而是某种更一般型的点集合。本章第一节将討論这种更一般型的集合以及定义于这种集合上的函数。我們从叙述关于一般集合(不仅是点集合，而且是由任意元組成的集合)的基本概念及基本事实开始。对于这些一般的集合将首先介紹几个基本概念与記号，以便以后使用。但我們要用的主要是点集合，就是其中元是直綫上、平面上、或多維空間中的点。

如果元 x 屬于集合 A，那末可以表示成 $x\in A$。如果 x 不屬于 A，那末写成 $x\overline{\in} A$。如果凡在 A 中的元也在 B 中，那末我們說 A 是 B 的部分，并且表成 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。如果 A 与 B 两集合由相同的元組成，我們表成 $A=B$。如果凡屬于 A 的元也屬于 B，而在 B 的諸元中有不屬于 A 者，那末我們說 A 是 B 的真部分。如果 $A\subset B$ 而 $B\subset C$，那末 $A\subset C$。設有有穷多个或可数无穷多个集合

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots。\tag{1}$$

所謂諸集合(1)的和，是指由至少屬于一个集合 A_n 的元所組成的集合 $\mathscr{E}_1$。为了表示集合之和，常使用下列記号：

$$\mathscr{E}_1=A_1+A_2+\cdots,\quad 或\quad \mathscr{E}_1=\sum_n A_n。$$

所謂諸集合(1)的交是指由凡屬于一切集合 A_n 的元所組成的集

合 $\mathscr{E}_2$。集合之交通常表成

$$\mathscr{E}_2=A_1A_2\cdots,\quad 或\quad \mathscr{E}_2=\prod_n A_n。$$

集合的交可以不含元。一个元也不含的集合叫做空集合，我們用 Λ 表示。例如設 A 与 B 两集合沒有公共元，則 $AB=\Lambda$。集合的和与交滿足交換律与結合律：

$$\left.\begin{array}{ll}A+B=B+A; & A+(B+D)=(A+B)+D;\\ AB=BA; & A\cdot(BD)=(AB)\cdot D。\end{array}\right\}\qquad(2)$$

分配律也是正确的：

$$B\sum_n A_n=\sum_n BA_n。\qquad(3)$$

为了証明这公式，只須証明凡在公式右边的集合中的元 x 必屬于公式左边的集合，并且反之也正确。如果 x 是公式(3)左边的集合中的元，那末它既屬于 B，也屬于集合 A_n 之和，所以至少屬于一个集合 A_n。設 $x\in A_k$，那末 $x\in B$，$x\in A_k$，所以 $x\in BA_k$，从而 x 屬于公式(3)右边的集合。反之，如果 x 屬于(3)右边的集合，它至少屬于和中的一項。設它屬于 BA_k，則 $x\in B$，且 $x\in A_k$。由此 $x\in B$，$x\in\sum A_n$，从而 x 屬于(3)式左边的集合。于是公式得証。如果 $B\subset A$，那末 $A+B=A$。由此，并依(2)与(3)可直接得

$$(A+B)(A+D)=A+BD。\qquad(4)$$

现在定义差。所謂两集合之差 $A-B$，是指由凡屬于 A 而不屬于 B 的元所組成的集合。如果 $A\subset B$，那末 $A-B$ 是空集合。注意在定义差时我們并沒有設 $B\subset A$。如果 $B\subset A$，那末显然

$$A=B+(A-B)。$$

一般情形則

$$A\subset B+(A-B)。\qquad(5)$$

现在举出几个以后要用的公式。其証明并不难。如果 $A-B=\mathscr{E}_2$，$B-A=\mathscr{E}_1$，則 $A+\mathscr{E}_1=B+\mathscr{E}_2$。如果 $A_n\subset B_n$ 則

$$\sum_n A_n \subset \sum_n B_n,\quad \sum_n B_n - \sum_n A_n \subset \sum (B_n - A_n)。\tag{6}$$

再举几个关于差的公式：

$$A-(B-D)\subset(A-B)+D;\tag{7}$$

$$AB=A-(A-B);\tag{7_1}$$

$$(A_1-A_2)-(B_1-B_2)\subset(A_1-B_1)+(B_2-A_2);\tag{8}$$

$$A+B=(A-B)+(B-A)+AB。\tag{8_1}$$

現在討論單調集合序列与極限的概念。如果有无穷的集合序列 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \cdots$，且

$$\mathscr{E}_1\subset\mathscr{E}_2\subset\mathscr{E}_3\subset\cdots,\tag{9}$$

那末我們說这序列是漲序列。縮序列則由下列条件定义：

$$\mathscr{E}_1\supset\mathscr{E}_2\supset\mathscr{E}_3\supset\cdots。\tag{10}$$

在(9)的情形中，集合 $\mathscr{E}_n$ 的極限是指由至少屬于一个集合 $\mathscr{E}_n$ 的元全体所成的集合 $\mathscr{E}$。我們写成 $\mathscr{E}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{E}_n$。注意在(9)的情形下，凡屬于集合 $\mathscr{E}_k$ 的元 x 必屬于一切 $n>k$ 的集合 $\mathscr{E}_n$。在(9)的情形下显然

$$\mathscr{E}=\lim_{n\to\infty}\mathscr{E}_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n,\tag{11}$$

也可以写成

$$\mathscr{E}=\lim_{n\to\infty}\mathscr{E}_n=\mathscr{E}_1+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{E}_{k+1}-\mathscr{E}_k)。\tag{12}$$

在上面公式右边的和中各項彼此无公点。在(10)的情形下所謂集合 $\mathscr{E}_n$ 的極限是由屬于一切集合 $\mathscr{E}_n$ 的元全体所組成的集合。在这情形下，

$$\mathscr{E}=\lim_{n\to\infty}\mathscr{E}_n=\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n,\tag{13}$$

而此外，在(10)的情形下，

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_{k+1})。\tag{14}$$

在这式中右边各項彼此沒有公元。我們只就單調集合序列定义了集合序列的極限。在一般情形也可以定义極限，但既然以后不用，

我們就不詳述了。

我們再特别就点集合介紹一个概念。設 $\mathscr{E}$ 是平面上点集合。所謂 $\mathscr{E}$ 的补集合是指由平面上不屬于 $\mathscr{E}$ 的一切点所組成的点集合。通常用 $C\mathscr{E}$ 表示 $\mathscr{E}$ 的补集合。現在叙述关于这一概念的几个公式。如果使用两次补集合的概念，那末仍得原集合：$C(C\mathscr{E})=\mathscr{E}$。如果 $\mathscr{E}_1\subset\mathscr{E}_2$，那末 $C\mathscr{E}_1\supset C\mathscr{E}_2$。此外，

$$\prod_n \mathscr{E}_n = C\sum_n C\mathscr{E}_n, \tag{15}$$

$$\sum_n \mathscr{E}_n = C\prod_n C\mathscr{E}_n, \tag{16}$$

$$C\prod_n \mathscr{E}_n = \sum_n C\mathscr{E}_n, \tag{17}$$

$$C\sum_n \mathscr{E}_n = \prod_n C\mathscr{E}_n, \tag{18}$$

$$C\mathscr{E}_1 - C\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1, \tag{19}$$

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1\cdot C\mathscr{E}_2, \tag{20}$$

其証明都不难。如果所給的集合是在直綫上的，也可以相对于直綫取补集合。对于多維空間也是如此。相对于某一集合 A 也可以取补集合。如果集合 $\mathscr{E}$ 的一切点屬于 A，那末所謂 $\mathscr{E}$ 相对于 A 的补集合乃是指差 $A-\mathscr{E}$。我們将只使用相对于整个空間的补集合，就是相对于直綫、平面等等。

32. 点集合 現在叙述特別关于点集合的概念与結果。在第二卷中，研究黎曼多重积分时曾論及关于平面上或 n 維空間中点集合的一些知識。現在重述一下第二卷所講的，并加以补充。为确定起見我們只談 XY 平面上的点集合。所論的一切不难推广到任意 n 維空間上去。

考察附有直角坐标 XY 的平面，并考察它上面的点集合。所謂有界集合，是指这集合中的一切点到原点的距离都小于一个确定的正数 N；对于这集合的一切点 (x, y)，$x^2+y^2<N^2$。所謂点 $P(a, b)$ 的 ε 邻域是指以 P 为中心以 ε 为半徑的閉圓，就是指由

满足条件 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant\varepsilon^2$ 的一切点 (x, y) 所成的集合。所謂 P 点是集合 $\mathscr{E}$ 的聚点或極限点，是指 P 点的任意 ε 邻域包含 $\mathscr{E}$ 中的无穷多个点。至于 P 点本身可以屬于 $\mathscr{E}$，也可以不屬于 $\mathscr{E}$。如果集合 $\mathscr{E}$ 包含它的一切聚点，则 $\mathscr{E}$ 叫做閉的。屬于集合 $\mathscr{E}$ 的点 P 叫做 $\mathscr{E}$ 的內点，是指 P 点的某一 ε 邻域完全含于 $\mathscr{E}$ 中。所謂集合 $\mathscr{E}$ 是开集合，是指它的一切点都是內点。閉集合常用字母 F 表示，有时附以标号(这是由于法文的"閉"是 fermé)。开集合常用字母 O 表示(法文 ouvert 是"开"的意思)。空集合是既开且閉的。所謂开集合 O 的界，是指凡有下列性質的点 P 所成的集合 l: P 点本身不屬于 O，但 P 点的任意 ε 邻域包含 O 中的点。既然 O 是由內点所組成的，可以知道 P 点的任意 ε 邻域必包含无穷多个屬于 O 的点，因此可以把开集合的界 l 定义做由凡不屬于 O 而又是 O 的聚点的点所組成的集合。不难証明，开集合的界是閉集合 [II, 88]。

設 $\mathscr{E}$ 是某一集合。添加上它的一切聚点，所得的集合表成 $\overline{\mathscr{E}}$。这种运算通常叫做封閉集合 $\mathscr{E}$，而 $\overline{\mathscr{E}}$ 叫做 $\mathscr{E}$ 的閉包。如果 $\mathscr{E}$ 是閉的，那末 $\overline{\mathscr{E}}=\mathscr{E}$，而如果 $\mathscr{E}$ 不是閉的，那末 $\mathscr{E}\subset\overline{\mathscr{E}}$。可以証明 $\overline{\mathscr{E}}$ 一定是閉的。設 P 是 $\overline{\mathscr{E}}$ 的聚点，須要証明它屬于 $\overline{\mathscr{E}}$。在 $\overline{\mathscr{E}}$ 的点中，可选出趋向于 P 的点序列 $P_n(n=1, 2, \cdots)$。如果在 P_n 諸点中有无穷多点屬于 $\mathscr{E}$，那末 P 点是 $\mathscr{E}$ 的聚点，而依封閉的程序，P 屬于 $\overline{\mathscr{E}}$。再設从某一标号 n 起，一切 P_n 点都不屬于 $\mathscr{E}$。依条件，它們都是 $\overline{\mathscr{E}}$ 的点，所以是 $\mathscr{E}$ 的聚点。在 P 点的任意 ε 邻域中有无穷多个点 P_n，而在每个 P_n 点的任意 ε 邻域中有无穷多个屬于 $\mathscr{E}$ 的点，所以，在 P 的任意 ε 邻域中必有无穷多个屬于 $\mathscr{E}$ 的点，因此 P 是 $\mathscr{E}$ 的聚点，而依封閉的程序，P 必屬于 $\overline{\mathscr{E}}$。如此得証，由封閉任意集合 $\mathscr{E}$ 而得的集合 $\overline{\mathscr{E}}$ 必是閉集合。注意全平面是既开且閉的集合。我們并不把无穷远点算在平面之中。凡有穷集合必是閉集

合。有穷集合沒有聚点。

現在介紹"集合間的距离"这一概念。所謂集合 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 間的距离是指从 $\mathscr{E}_1$ 的任一点到 $\mathscr{E}_2$ 的任一点距离的下确界。如果两集合有公点，則它們間的距离是零。但两集合間距离等于零不必表示它們有公点。两个无公点的集合可以是无限地接近的。如果两集合都是閉而有界的，則这是不可能的，而在第二卷中曾証明过下面的定理：如果 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 是无公点的有界閉集合，那末它們間的距离 d 是正数，并且至少有 $\mathscr{E}_1$ 中的一点 P_1 与 $\mathscr{E}_2$ 中的一点 P_2，使 $P_1P_2=d$。从这定理的証明直接可知，如果这两閉集合中只有一个是有界的，那末定理依然成立。特别可知，由开集合任意一点到这集合的界的距离是正数。

33. 閉集合与开集合的性質 現在証明閉集合与开集合的几个特殊性質。

定理 1. 有穷多或可数无穷多开集合的和仍是开集合。有穷多开集合的交仍是开集合。

考察有穷或可数无穷多开集合的和：

$$\mathscr{E}=\sum_n O_n。$$

如果 $P\in\mathscr{E}$，那末 P 至少屬于一个 O_n。設 $P\in O_k$。旣然 O_k 是开集合，必有 P 点的某一 ε 邻域完全屬于 O_k。P 点的这 ε 邻域必也屬于和 $\mathscr{E}$，由此知 $\mathscr{E}$ 是开集合。現在考察有穷交

$$\mathscr{E}=\prod_{n=1}^{m} O_n,$$

而設 P 屬于 $\mathscr{E}$。現在和以上一样要証明 P 点有一 ε 邻域屬于 $\mathscr{E}$。旣然 P 屬于 $\mathscr{E}$，P 一定屬于一切 $O_k(k=1,\cdots,m)$。旣然 O_k 是开集合，对于任意 k，必有 P 点的某一 ε_k 邻域屬于 O_k。如果 ε 表 $\varepsilon_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 中最小的，那末 P 点的 ε 邻域必屬于一切 O_k，所以也屬于 $\mathscr{E}$。注意我們不能証明可数无穷多开集合的积仍是开集

合。(例如 $O_n=\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$，則 O_n 是开集合，但 $\prod_n O_n=[0,1]$ 是閉集合。)

定理 2. 有穷或可数无穷多閉集合的交仍是閉集合。有穷多閉集合的和仍是閉集合。

定理 3. 如果 $F\subset O$，那末 $O-F$ 是开集合。如果 $O\subset F$，那末 $F-O$ 是閉集合。

現在証明定理 3，并只証其前半。如果 $P\in O-F$，則 $P\in O$ 而 $P\bar{\in} F$，而我們要証明 P 点有一 ε 邻域屬于 $O-F$，即屬于 O 而不屬于 F。既然 $P\bar{\in} F$，由于 F 是閉的，可知 P 有一 ε_1 邻域不与 F 相交。另一方面，既然 $P\in O$，P 有一 ε_2 邻域屬于 O。如果取 ε 为 ε_1 与 ε_2 二者較小的那个，則 P 的 ε 邻域屬于 O 而不屬于 F，定理于是得証。由这定理可直接得出下列結論：閉集合的补集合是开的，而开集合的补集合是閉的。

現在証明定理 2。要証集合

$$\mathscr{E}=\prod_n F_n$$

是閉的。取諸集合的补集合，則(依[81])

$$C\mathscr{E}=\sum_n CF_n。$$

集合 CF_n 是开的，所以依定理 1，集合 $C\mathscr{E}$ 是开集合，而依定理 3 它的补集合 $C(C\mathscr{E})=\mathscr{E}$ 是閉集合，如所欲証。注意可数无穷多閉集合的和可以不是閉的(例如取 $F_n=\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$，則 $\sum_n F_n=(0,1]$ 不是閉的)。由上述可知开集合与閉集合的对偶性。

所謂集合 $\mathscr{E}$ 为某些集合所成的組 M 所复盖，是指凡 $\mathscr{E}$ 的点至少屬于 M 組中的某一集合。

定理 4 (波埃勒). 如果有界閉集合 F 为由无穷多开集合 O 所成的組 α 所复盖，那末由这无穷組 α 可以取出有穷多开集合来，使

它們也复盖 F。

用归謬法証明这定理。設任何有穷多个屬于組 α 的开集合都不能复盖 F，从而推出矛盾来。既然 F 是有界集合，凡 F 的点必屬于某一有穷的二維区間 $\Delta_0(a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d)$。把这閉区間 Δ_0 分成四个相等部分，这可由平分区間 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 而得。所得四个区間仍取作閉的。依定理 2，凡既屬于 F 又屬于这四个閉区間中的一个的点作成閉集合，而至少有一个如此的閉集合不为組 α 中有穷多个开集合所复盖。挑出相应的那个閉区間，将它再分成四个相等部分，并仍如上推理。如此得出一串依次相含的区間 Δ_0，Δ_1，Δ_2，… 来，其中每一个是它前一个的四分之一，并且：对于一切 k，F 与 Δ_k 的公共部分不能为組 α 中有穷多开集合所复盖。无限地增大 k，則区間 Δ_k 无限地縮成一点 P，而 P 屬于一切区間 Δ_k。既然对于任意 k，Δ_k 都包含集合 F 中的无穷多个点，点 P 必是 F 的聚点，因此必屬于 F，因为 F 是閉集合。这 P 点必为組 α 中的某一开集合 O' 所复盖。点 P 的某一 ε 邻域必屬于开集合 O'。当 k 足够大时区間 Δ_k 必完全落于 P 点这一 ε 邻域内部。所以 Δ_k 也为这一个屬于組 α 的开集合 O' 所复盖，但上边說过 F 与 Δ_k 的共同部分对于任意 k 都不能为有穷多个屬于組 α 的开集合所复盖，由此得出了矛盾。定理于是証明了。

定理 5. 凡开集合可以表成可数无穷多个互无公点的半开区間之和。

所謂平面上的半开区間是指由不等式 $a<x\leqslant b$，$c<y\leqslant d$ 定义的有穷区間。

在平面上作正方形的網，使其边平行于坐标軸，使其边長都是 1。由这些正方形取出完全包含在那开集合 O 之中的那些正方形来。这种正方形的数目可以是有穷的或可数无穷的，也可以是零。把剩下的正方形都各分成同样的四个正方形，而由所得的新正方

形取出完全包含在开集合 O 中的那些来。把所余的那些正方形再各分成四个相等部分，并由所得的新正方形取出完全包含在 O 中的那些，如此繼續下去。现在証明凡 O 中的点必屬于上面所取的那些含于 O 中的正方形的一个里面。事实上，設 d 是 P 到 O 的界的正距离。如果分割到对角綫長小于 d 的那些正方形，那末 P 点一定屬于一个完全包含在 O 中的正方形。如果所有正方形都取做半开的，那末它們彼此无公点，而定理証明了。組成 O 的正方形数目一定是可数无穷多的，因为有穷多个半开区間之和不可能是开集合。用 Δ_n 表示上面所作的那些正方形，则

$$O=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n。\qquad(21)$$

在一維的情形，即在直綫的情形，下面命題是正确的：凡直綫上的开集合必是有穷或可数无穷多互无公点的开区間之和。以后并不用这一結果，所以不加証明。

上节和本节中所述的一切可适用于直綫、三維空間、以及一般的 n 維空間。其区别只在于 ε 邻域与区間的定义。在三維空間中所謂 P 点的 ε 邻域是以 P 为中心以 ε 为半徑的球体，而区間是其棱平行于坐标軸的長方体。半开区間由不等式 $a_1<x\leqslant b_1$; $a_2<<y\leqslant b_2$; $a_3<z\leqslant b_3$ 定义。在直綫的情形，点 x_0 的 ε 邻域是由不等式 $x_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon$ 定义的。

34. 初等圖形 以后有穷半开区間将起基本的作用，我們簡称之为区間。設已知一个非負的、加法的、正常的区間函数 $G(\Delta)$。我們的問題是把它推广使定义于一种更广的点集合类，并使它仍能保留上述的性質。所謂初等圖形是指凡由有穷多个互无公点的区間 $\Delta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 作成的和。用 R 表示这种初等圖形，我們可以写成

$$R=\sum_{k=1}^{m}\Delta_k。\qquad(22)$$

这一初等圖形可以用其他方式分解成有穷多互无公点的区間之和：

$$R=\sum_{k=1}^{m'}\Delta'_k。\tag{23}$$

不难看出，对于任意两种分解法，可得

$$\sum_{k=1}^{m}G(\Delta_k)=\sum_{k=1}^{m'}G(\Delta'_k)。\tag{24}$$

为了証明，只須取(22)与(23)两分解法的积而作新分解法，并注意 $G(\Delta)$ 的加法性就够了。如此則(24)式的左右两边都是依新分解法諸区間所作的諸値 $G(\Delta)$ 之和。为了得出(24)式的左边，只須把同一个 Δ_k 的各部分区間所对应的各項加起来，而为了得出(24)式的右边，只須把同一个 Δ'_k 的各部分区間所对应的各項加起来。如此可知，如果初等圖形 R 以任意方式分解成互无公点的部分区間，那末对于所得諸部分区間所作諸函数值 $G(\Delta)$ 之和有确定的数値，与 R 的分解法无关。这和可以取做函数 $G(R)$ 对于初等圖形 R 之値：

$$G(R)=\sum_{k=1}^{m}G(\Delta_k)\tag{25}$$

对于任何分解 R 成有穷多个互无公点的区間之和的方式都成立。如此很簡單地已把函数 $G(\Delta)$ 延展到初等圖形上去了。使用公式(21)也可以同样地把 $G(\Delta)$ 延展到一切开集合上去。但我們将采取別的途徑。其中开集合将在我們的研究中起着基本作用。在本节将再討論区間与初等圖形的几个簡單性質。

注意：如果 $R_1\subset R_2$，則 $G(R_1)\leqslant G(R_2)$。这从 $G(\Delta)$ 的非負性可以直接推出，因为可以取 R_2 的一种分解成区間的方法，使凡与 R_1 有公点的部分区間完全屬于 R_1。設 $\delta_k\,(k=1,\cdots,p)$ 是彼此可能有公点的区間。延長 δ_k 諸边成直綫，可以把諸 δ_k 分成部分区間，而这些部分区間有下列性質：如果两个部分区間有公点，它們必重合。把重合的区間看做一个，可得一初等圖形 R_0，这圖

形显然也是諸 δ_k 之和：$R_0=\sum_{k=1}^{p}\delta_k$，而

$$G(R_0)\leqslant\sum_{k=1}^{p}G(\delta_k),\tag{26}$$

而如果对于某一个重合区間 Δ，函数 $G(\Delta)$ 的值是正的，则上面式中必取 $<$ 号。

現在介紹一个以后要用到的新概念。設 $\Delta(a<x\leqslant b, c<y\leqslant d)$ 是某一区間，α 是正数。所謂区間 Δ 的 α 压縮形是指由不等式 $a+\alpha<x\leqslant b$，$c+\alpha<y\leqslant d$ 定义的区間，并用記号 ${}^{(\alpha)}\Delta$ 表示它。所謂区間 Δ 的 α 延展形是指由不等式 $a<x\leqslant b+\alpha$，$c<y\leqslant d+\alpha$ 定义的区間，并用記号 $\Delta^{(\alpha)}$ 表示它。差 $\Delta-{}^{(\alpha)}\Delta={}^{(\alpha)}R$ 及 $\Delta^{(\alpha)}-\Delta=R^{(\alpha)}$ 都是初等圖形。依 $G(\Delta)$ 的非負性，可知

$$G({}^{(\alpha)}R)=G(\Delta)-G({}^{(\alpha)}\Delta)\geqslant 0,$$

而

$$G(R^{(\alpha)})=G(\Delta^{(\alpha)})-G(\Delta)\geqslant 0,$$

而由函数 $G(\Delta)$ 的正常性可知

$$\lim_{\alpha\to+0}G({}^{(\alpha)}\Delta)=\lim_{\alpha\to+0}G(\Delta^{(\alpha)})=G(\Delta)。\tag{26$_1$}$$

現在証明一个以后要用到的輔助定理。

輔助定理 如果初等圖形 R 为有穷或可数无穷多个区間 δ_k' 所复盖（这些区間可能有公点），那末

$$\sum_k G(\delta_k')\geqslant G(R)。\tag{27}$$

这輔助定理的結論直观上是很显然的。現在引用定理 4 而予以严謹的証明。設 ε 是預定的正数。分解 R 成有穷多个互无公点的区間 $\Delta_k(k=1,2,\cdots,m)$，并取每个部分区間 Δ_k 的 α 压縮形，而令正数 α 足够小，以使对于諸压縮形所取的函数值 $G(\Delta)$ 之和 $\geqslant G(R)-\varepsilon$。用 R_α 表示由这些压縮形之和所組成的初等圖形，那末

$$G(R_\alpha)\geqslant G(R)-\varepsilon。\tag{28}$$

对于凡复盖 R 的区間 δ'_k 取其 α_k 延展形，而令正数 α_k 足够小，以使

$$G(\delta_k'^{(\alpha_k)})\leqslant G(\delta'_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}。\tag{29}$$

把凡相加而得 R_α 的諸压縮形区間封閉，作成閉区間。所得諸閉区間(其数有穷)的和是一个閉集合 F，显然 $F\subset R$。如果从 $\delta_k'^{(\alpha_k)}$ 去掉它的界，即是去掉它的两边和一頂点，那末所余是一开区間 $\delta_k'^{(\alpha_k)}$。注意一下区間 δ'_k 的延展，可知諸开区間 $\delta_k'^{(\alpha_k)}$ 复盖上述的那些閉区間，也就是复盖了閉集合 F。比如設区間 δ'_k 的数目无穷。依定理 4 只須取有穷多个 $\delta_k'^{(\alpha_k)}(k=1, 2, \cdots, q)$ 就足以复盖 F，而后者又复盖着 R_α。

諸区間 $\delta_k'^{(\alpha_k)}$ 之和$(k=1, 2, \cdots, q)$是一个初等圖形 R'，而 $R_\alpha\subset R'$，所以 $G(R_\alpha)\leqslant G(R')$。依(26)与(29)，

$$G(R')\leqslant\sum_{k=1}^{q}G(\delta_k'^{(\alpha_k)})\leqslant\sum_{k=1}^{q}G(\delta'_k)+\varepsilon\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k},$$

由此可以直接推出

$$G(R_\alpha)\leqslant G(R')\leqslant\sum_{k=1}^{q}G(\delta'_k)+\varepsilon,$$

因此

$$G(R_\alpha)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}G(\delta'_k)+\varepsilon。$$

比較(28)得

$$G(R)-\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}G(\delta'_k)+\varepsilon,\ \text{所以}\ \sum_{k=1}^{\infty}G(\delta'_k)\geqslant G(R)-2\varepsilon。$$

左边的和与 ε 无关，由于 ε 是任意的，可得不等式(27)。注意(27)式左边的和中各項是非負的，有穷的，但其和可能是$+\infty$。

以后常要遇到非負項的无穷和。如果和中有一項是 $+\infty$，那末和也須算做$+\infty$。但即使是每項都有穷，其和也可能是$+\infty$，就是說級数發散。

35. 外测度及其性質 用函数 $G(\varDelta)$ 可以对平面上每一点集合給以一个非負的数与它相应，后者称做那集合的外测度。

定义 設有穷多或可数无穷多个区間 $\varDelta_n(n=1,2,\cdots)$ 复盖了集合 $\mathscr{E}$。所謂 $\mathscr{E}$ 的外测度是指对于一切可能的复盖集合 $\mathscr{E}$ 的区間組 $\varDelta_n$ 所取諸相应和值

$$\sum_n G(\varDelta_n) \tag{30}$$

的下确界。我們用記号 $|\mathscr{E}|_G$ 表示外测度，其中标号 G 指示用以定义外测度的那个函数 $G(\varDelta)$。如此对于任意的复盖組：

$$\sum_n G(\varDelta_n)\geqslant|\mathscr{E}|_G,\quad \text{而}\quad |\mathscr{E}|_G=\inf\sum_n G(\varDelta_n)。 \tag{31}$$

如果对于任意复盖組(30)中的和总是 $+\infty$，那末外测度也算做是 $+\infty$。有界集合的外测度常是有穷的，因为它可以包括在一个区間 $\varDelta_0$ 內，而依条件 $G(\varDelta_0)$ 是有穷的。注意无界集合 $\mathscr{E}$ 不能为有穷多区間所复盖，因为每个区間都是有穷的。但无界集合的外测度仍可能是有穷数。現在証明一系列关于外测度的定理。

定理 1. 如果 $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}''$，那末 $|\mathscr{E}'|_G\leqslant|\mathscr{E}''|_G$。

凡 $\mathscr{E}''$ 的复盖組必是 $\mathscr{E}'$ 的复盖組，所以对 $\mathscr{E}'$ 所作的和(30)的下确界可能小于对 $\mathscr{E}''$ 所做的，但絕不会大于后者，所以定理証明了。

定理 2. 如果 R 是初等圖形，那末其外测度等于 $G(R)$，就是說 $|R|_G=G(R)$。

如果以某种方法分割 R 成部分区間 $\varDelta_k$，那末后者复盖 R，而由(25)以及外测度的定义为对一切复盖組所作諸和(30)的下确界，必然 $|R|_G\leqslant G(R)$。現在証明相反的不等式。如果諸区間 $\varDelta_n'$ 复盖 R，依上节的輔助定理，$\sum_n G(\varDelta_n')\geqslant G(R)$，由此可知 $|R|_G\geqslant G(R)$。由上面証明了的两个不等式可知 $|R|_G=G(R)$。

定理 3. 对于可数或有穷項集合之和，和集合的外测度 $\leqslant$ 各項

集合外測度的和。这就是說：

$$|\sum_n \mathscr{E}_n|_G \leqslant \sum_n |\mathscr{E}_n|_G \text{。} \tag{32}$$

以后我們常用一个字母 S 表示某集合的复盖。同时对这复盖所作的和(30)表成 $\sigma(S)$。設預給一正数 ε。依下确界的定义，存在集合 $\mathscr{E}_n$ 的一复盖 S_n，使 $\sigma(S_n) \leqslant |\mathscr{E}_n|_G + \frac{\varepsilon}{2^n}$。取所有出現于一切 S_n 中的区間 $(n=1, 2, \cdots)$。这些区間成为 $\sum_n \mathscr{E}_n$ 的一复盖 S，而对于这一复盖，显然

$$\sigma(S) = \sum_n \sigma(S_n) \leqslant \sum_n |\mathscr{E}_n|_G + \varepsilon \sum_n \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_n |\mathscr{E}_n|_G + \varepsilon\text{。}$$

依下确界的定义：

$$|\sum_n \mathscr{E}_n|_G \leqslant \sum_n |\mathscr{E}_n|_G + \varepsilon,$$

而既然 ε 是任意的，可得不等式(32)。注意(32)右边的和或其中个别項可能是 $+\infty$。由于諸項都不是負的，諸項的次序并无作用。定义了外測度之后，就把函数 $G(\varDelta)$ 推广到一切可能的点集合上去，但如此則一般說来失去了这函数的加法性。事实上，可以証明，如果集合 $\mathscr{E}_n$ 互无公点，那末在公式(32)中可能有些情形要用 $<$ 号。以后我們将介紹某类集合，对于这类集合外測度保存其加法性。先証明关于外測度的另一定理。

定理 4. 任何集合 $\mathscr{E}$ 可以为一个适当的开集合 O 所复盖，使后者的外測度与 $\mathscr{E}$ 的外測度相差任意小，这就是說：如果 $\mathscr{E}$ 是任意集合，ε 是預定的正数，那末必存在一个开集合 O，满足 $\mathscr{E} \subset O$，而 $|O|_G \leqslant |\mathscr{E}|_G + \varepsilon$。

如果 $|\mathscr{E}|_G = +\infty$，那末凡复盖集合 $\mathscr{E}$ 的开集合 O 都能满足不等式 $|O|_G \leqslant |\mathscr{E}|_G + \varepsilon$。以后設 $|\mathscr{E}|_G$ 是有穷的。設 ε 是預定的正数。取 $\mathscr{E}$ 的复盖区間組 $\varDelta_n$，使满足不等式

$$\sum_n G(\varDelta_n) \leqslant |\mathscr{E}|_G + \frac{\varepsilon}{2}\text{。} \tag{33}$$

取每个区間 Δ_n 的 α_n 延展形，并取正数 α_n 使它满足

$$G(\Delta_n^{(\alpha_n)})\leqslant G(\Delta_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}。\tag{34}$$

如果取消 $\Delta_n^{(\alpha_n)}$ 的界，就是說取去它的两边与一顶点，则所得諸开区間 $\Delta_n^{(\alpha_n)}$ 的和是开集合 O，并且 O 为諸区間 $\Delta_n^{(\alpha_n)}$ 所复盖。依下确界的定义，

$$|O|_G\leqslant\sum_n G(\Delta_n^{(\alpha_n)})。$$

引用(34)，可得

$$|O|_G\leqslant\sum_n G(\Delta_n)+\frac{\varepsilon}{2},$$

而注意(33)，可得

$$|O|_G\leqslant|\mathscr{E}|_G+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=|\mathscr{E}|_G+\varepsilon。$$

36. 可測集合　現在介紹一类集合，叫做可測集合，我們在以后要証明它們的外測度有加法性。对于这类可測集合，它們的外測度簡称測度。

定义　集合 $\mathscr{E}$ 称为可測的，是指它可以被一个开集合 O 所复盖，使差 $O-\mathscr{E}$ 的外測度任意小，这就是說，集合 $\mathscr{E}$ 叫做可測的，是指对于任意預給的正数 ε，必存在一个开集合 O，使 $\mathscr{E}\subset O$，而 $|O-\mathscr{E}|_G\leqslant\varepsilon$。可測集合的外測度簡称这集合的測度。

在定义可測集合时所用的条件比在定理 4 中所陈述的較强。定理 4 中的性質是一切集合所公有的，但却有集合存在，对于所选函数 $G(\Delta)$ 是不可測的，从而不滿足定义中的条件。为了表示可測集合的測度，可以仍用符号 $|\mathscr{E}|_G$，因为依定义对于可測集合，測度就是外測度。我們現在証明，任意区間 Δ 是可測的。依定理 1，它的外測度等于 $G(\Delta)$。以后我們将看到，凡初等圖形也必可測。从而可以用記号 $G(\mathscr{E})$ 来表示任意可測集合的測度。現在規定空集合的外測度以及測度都是零。这与上述定义完全相符。再介紹

一个定义：集合 $\mathscr{E}$ 叫做依 $G(\Delta)$ 是测度为零的集合，或簡称测度为零的集合，是指对于这固定了的 $G(\Delta)$，$|\mathscr{E}|_G=0$。依这定义直接得知：凡测度为零的集合的部分集合也是测度为零的。現在証明可测集合的一系列性質。这些性質將用做以后全部研究的基础。

定理 5. 凡开集合必是可测的。

如果 $\mathscr{E}$ 是开集合，那末只須在定义的条件中令 $O=\mathscr{E}$ 就够了，因为 $|O-\mathscr{E}|_G=0$。

定理 6. 任意区間 Δ 是可测集合，其测度等于 $G(\Delta)$。

設 Δ 是某一区間。取它的 α 延展，得出区間 $\Delta^{(\alpha)}$。差 $\Delta^{(\alpha)}-\Delta$ 是初等圖形，而由于 $G(\Delta)$ 是正常函数，得：$G(\Delta^{(\alpha)}-\Delta)=G(\Delta^{(\alpha)})-G(\Delta)\to 0$ 当 $\alpha\to+0$ 时成立，这就是說对于任意預定的正数 ε，必存在数 α，使 $G(\Delta^{(\alpha)}-\Delta)\leqslant\varepsilon$。設 O 是由区間 $\Delta^{(\alpha)}$ 去掉其界而得的开区間。依延展的方法，$\Delta\subset O$。为了証明 Δ 之可测性，只剩下証明 $|O-\Delta|_G\leqslant\varepsilon$ 了。因为 $O\subset\Delta^{(\alpha)}$，而依定理 1，$|O-\Delta|_G\leqslant|\Delta^{(\alpha)}-\Delta|_G$。但 $\Delta^{(\alpha)}-\Delta$ 是初等圖形，依定理 2，$|\Delta^{(\alpha)}-\Delta|_G=G(\Delta^{(\alpha)}-\Delta)\leqslant\varepsilon$，就是說 $|O-\Delta|_G\leqslant\varepsilon$。这正是所要証的。$\Delta$ 的测度等于其外测度，所以与 $G(\Delta)$ 相等，因为 Δ 是初等圖形的特例。

定理 7. "测度为零的集合"——就是外测度为零的集合，与"测度等于零的可测集合"两概念是相同的。

如果 $|\mathscr{E}|_G=0$，那末依定理 4，对于任意預定的正数 ε 有开集合 O 存在，使 $\mathscr{E}\subset O$，而 $|O|_G\leqslant\varepsilon$，因此依定理 1，$|O-\mathscr{E}|_G\leqslant\varepsilon$，所以 $\mathscr{E}$ 是可测的。$\mathscr{E}$ 的测度等于其外测度，所以等于零。反之如果 $\mathscr{E}$ 是可测集合，而其测度等于零，那末依测度的定义，它的外测度等于零，而定理証明了。

定理 8. 有穷多或可数无穷多可测集合的和仍是可测的。

設 $\mathscr{E}_n$ 是可测集合，$\mathscr{E}$ 是它們的和：$\mathscr{E}=\sum_n\mathscr{E}_n$，而 ε 是預定的正数。依可测集合的定义，必存在开集合 O_n，满足 $\mathscr{E}_n\subset O_n$，及

$|O_n-\mathscr{E}_n|_G<\frac{\varepsilon}{2^n}$。开集合 O_n 的和仍是一开集合 O，而且显然 $\mathscr{E}\subset O$，又依[31]的(6)，

$$O-\mathscr{E}\subset\sum_n(O_n-\mathscr{E}_n)。$$

应用定理1与3，得

$$|O-\mathscr{E}|_G\leqslant|\sum_n(O_n-\mathscr{E}_n)|_G\leqslant\sum_n|O_n-\mathscr{E}_n|_G,$$

而因为 $|O_n-\mathscr{E}_n|_G<\frac{\varepsilon}{2^n}$，所以

$$|O-\mathscr{E}|_G<\varepsilon。$$

于是証明了 $\mathscr{E}$ 是可测的。现在轉向証明閉集合的可测性。首先証明一个輔助定理，这乃是在某些补充假設之下定理4的精确化。

輔助定理　如果两集合 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2$ 間的距离是正数，那末

$$|\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2|_G=|\mathscr{E}_1|_G+|\mathscr{E}_2|_G。$$

設 d 是集合 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 間的正距离。对于任意預定的正数 ε 必存在集合 $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ 的一个复盖 S，使

$$\sigma(S)\leqslant|\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2|_G+\varepsilon。\tag{35}$$

将出現于 S 中的每一区間分割成有穷多区間，使后者的对角綫長都小于 d。这时出現于 S 中的区間可分成三类：第一类中的区間只复盖 $\mathscr{E}_1$ 中的点，第二类中的只复盖 $\mathscr{E}_2$ 中的点，而第三类中的既不复盖 $\mathscr{E}_1$ 的点也不复盖 $\mathscr{E}_2$ 的点。既复盖 $\mathscr{E}_1$ 的点也复盖 $\mathscr{E}_2$ 的点的区間根本不存在。第三类中的区間可以从 S 中删去。如此則和 $\sigma(S)$ 只能减小，而不等式(35)依然有效。如此复盖 S 分解成复盖 S_1 与复盖 S_2，而 S_1 的諸区間复盖 $\mathscr{E}_1$ 并与 $\mathscr{E}_2$ 无公点，S_2 的諸区間复盖 $\mathscr{E}_2$ 并与 $\mathscr{E}_1$ 无公点。此外，$\sigma(S)=\sigma(S_1)+\sigma(S_2)$，而依(35)

$$\sigma(S_1)+\sigma(S_2)\leqslant|\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2|_G+\varepsilon。\tag{36}$$

由下确界的定义得 $|\mathscr{E}_1|_G\leqslant\sigma(S_1)$ 而 $|\mathscr{E}_2|_G\leqslant\sigma(S_2)$，所以由不等式(36)可得 $|\mathscr{E}_1|_G+|\mathscr{E}_2|_G\leqslant|\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2|_G+\varepsilon$，而既然 ε 是任意的，可得 $|\mathscr{E}_1|_G+|\mathscr{E}_2|_G\leqslant|\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2|_G$。另一方面，由定理3得知 $|\mathscr{E}_1+$

$+\mathscr{E}_2|_G\leqslant|\mathscr{E}_1|_G+|\mathscr{E}_2|_G$。如此得 $|\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2|_G=|\mathscr{E}_1|_G+|\mathscr{E}_2|_G$，如所欲証。

系 如果 F_1 与 F_2 是两个无公点的閉集合，并且其中至少一个是有界的，那末 $|F_1+F_2|_G=|F_1|_G+|F_2|_G$。如果 $F_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 是互无公点的有界閉集合，那末 $\left|\sum_{k=1}^{m}F_k\right|_G=\sum_{k=1}^{m}|F_k|_G$。为了証明这系，只須应用在[32]中所述关于无公点閉集合間距离的結果。

定理 9. 凡閉集合必可測。

首先設 F 是某一有界閉集合，并設 ε 是預定的正数。依定理 4 存在一开集合 O，滿足 $F\subset O$ 及 $|O|_G\leqslant|F|_G+\varepsilon$。現在証明这开集合 O 滿足不等式

$$|O-F|_G\leqslant\varepsilon, \tag{37}$$

于是可測集合的条件滿足。依定理 3[33]，差 $O-F$ 是开集合，所以依定理 5，它可以表示成可数多个区間 Δ_n 的和，而这些区間互无公点：

$$O-F=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n。 \tag{38}$$

固定正整数 m，考察(38)中和的前 m 項的和，对于凡出現于这后一和中的区間，取其 α 压縮形，而正数 α 可随意取定。如此可得一初等圖形 R：

$$R=\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n。$$

如果封閉每个区間 ${}^{(\alpha)}\Delta_n(n=1, 2, \cdots, m)$，那末与上面和相应的和是一閉集合，这显然与初等圖形 R 的閉包 $\overline{R}$ 相合。每个閉区間 $\overline{{}^{(\alpha)}\Delta_n}$ 为相应区間 Δ_n 所复蓋。这一閉集合 $\overline{R}$ 与 F 无公点，所以它們間的距离是正数。所以 R 与 F 間的距离更是正数，而依輔助定理，

$$\left|\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n+F\right|_G=\left|\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n\right|_G+|F|_G。$$

但依(38)，$\sum\limits_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n+F\subset O$，所以

$$\left|\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n\right|_G+|F|_G\leqslant|O|_G.$$

注意不等式$|O|_G\leqslant|F|_G+\varepsilon$，可得

$$\left|\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n\right|_G+|F|_G\leqslant|F|_G+\varepsilon。$$

依条件，F 是有界集合，所以 $|F|_G$ 是有穷数。由上述不等式得不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n\right|_G\leqslant\varepsilon。$$

但

$$\left|\sum_{n=1}^{m}{}^{(\alpha)}\Delta_n\right|_G=G(R)=\sum_{n=1}^{m}G({}^{(\alpha)}\Delta_n)=\sum_{n=1}^{m}|{}^{(\alpha)}\Delta_n|_G,$$

上述不等式可以写成下面形式：

$$\sum_{n=1}^{m}|{}^{(\alpha)}\Delta_n|_G\leqslant\varepsilon。$$

首先令 α 趋向于零，然后令 m 趋向于无穷，可得不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta_n|_G\leqslant\varepsilon。$$

最后由公式(38)与定理 3 可得

$$|O-F|_G\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta_n|_G\leqslant\varepsilon,$$

这正是不等式(37)。现在設閉集合 F 是无界的。設 γ_n 是以原点为中心以 n 为半徑的閉圓。作有界閉集合 $F_n=F\cdot\gamma_n$，可得

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}F_n,$$

而 F 的可测性可由定理 8 直接推出。如此定理 9 証明了。

定理 10. 如果 $\mathscr{E}$ 是可測集合，那末补集合 $C\mathscr{E}$ 也是可測的。

由于 $\mathscr{E}$ 是可测的，必存在开集合 O_n，使 $\mathscr{E}\subset O_n$，并且 $|O_n-\mathscr{E}|_G<\frac{1}{n}$。作閉集合 $F_n=CO_n$。由于 $\mathscr{E}\subset O_n$，得 $F_n\subset C\mathscr{E}$。此外，依[31]的(19)可得等式 $C\mathscr{E}-F_n=O_n-\mathscr{E}$。用一切 F_n 的和代替左边的 F_n，得

$$C\mathscr{E}-\sum_{n=1}^{\infty}F_n\subset C\mathscr{E}-F_n,\text{ 就是説 } C\mathscr{E}-\sum_{n=1}^{\infty}F_n\subset O_n-\mathscr{E},$$

而由于 $|O_n-\mathscr{E}|_G<\frac{1}{n}$，得

$$|C\mathscr{E}-\sum_{n=1}^{\infty}F_n|_G<\frac{1}{n}。$$

上面不等式的左边与 n 无关，令 n 增加至于无穷，得

$$|C\mathscr{E}-\sum_{n=1}^{\infty}F_n|_G=0,$$

由此得知左边的差是测度为零的集合 $\mathscr{E}_0$。如此可以把 $C\mathscr{E}$ 写成可测集合的和：

$$C\mathscr{E}=\mathscr{E}_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n,$$

由此得知，依定理 8，$C\mathscr{E}$ 是可测的。

依定义，集合的可测性是借开集合而建立的。在下面定理中將証明同样也可以借閉集合建立集合的可测性。

定理 11. $\mathscr{E}$ 可測的必要且充分的条件乃是对于任意预定的 ε 存在一閉集合 F，滿足 $F\subset\mathscr{E}$ 与 $|\mathscr{E}-F|_G<\varepsilon$。

$\mathscr{E}$ 的可测性与 $C\mathscr{E}$ 的可测性是同效的，而后者可测的必要且充分的条件是对于任意预定的正数 ε，必存在一开集合 O，使 $C\mathscr{E}\subset O$，而 $|O-C\mathscr{E}|_G\leqslant\varepsilon$。如果令 $F=CO$，依[31]的(19)可知 $O-C\mathscr{E}=\mathscr{E}-CO=\mathscr{E}-F$，而 $F\subset\mathscr{E}$，所以得到定理中的結論。

定理 12. 有穷多或可数无穷多个可測集合的交是可測集合，两可測集合的差也是可測集合。

如果集合 $\mathscr{E}_n$ 都是可測的，它們的交的可測性可以由[31]中的公式

$$\prod_n \mathscr{E}_n = C\sum_n C\mathscr{E}_n$$

与定理 8 及 10 得出。如果 A 与 B 是可測的，那末它們的差的可測性可由 [31] 中的公式 $A-B=A\cdot CB$ 与剛才証明的交之可測性直接推出。

定理 13 有穷多或可数无穷多个互无公点的可测集合的和的測度等于和中各項集合的測度之和。

設 $\mathscr{E}_n$ 是互无公点的可測集合。其和的可測性可由定理 8 得知。首先設一切集合 $\mathscr{E}_n$ 都是有界的。依定理 11，对于任意預給的正数 ε，必存在閉集合 F_n，使 $F_n\subset\mathscr{E}_n$，而 $|\mathscr{E}_n-F_n|_G\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$，其中集合 F_n 显然是有界集合，并且互无公点。由公式 $\mathscr{E}_n=F_n+$ $+(\mathscr{E}_n-F_n)$ 直接可得

$$|\mathscr{E}_n|_G\leqslant|F_n|_G+\frac{\varepsilon}{2^n}。$$

另一方面，考察諸集合 F_n 中的前 m 个，則

$$\sum_{n=1}^{m}F_n\subset\sum_n\mathscr{E}_n,\ 所以\left|\sum_{n=1}^{m}F_n\right|_G\leqslant\left|\sum_n\mathscr{E}_n\right|_G。$$

对于有穷多互无公点的閉集合 F_n 之和，可以引用上面証明过的輔助定理，再引用不等式 $|F_n|_G\geqslant|\mathscr{E}_n|_G-\frac{\varepsilon}{2^n}$，可得

$$\left|\sum_n\mathscr{E}_n\right|_G\geqslant\sum_{n=1}^{m}|F_n|_G\geqslant\sum_{n=1}^{m}|\mathscr{E}_n|_G-\sum_{n=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^n}。$$

再考察較复杂的情形，即集合 $\mathscr{E}_n$ 的数目无穷。在上面不等式中无限地增大 m，可得

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n\right|_G\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\mathscr{E}_n|_G-\varepsilon,$$

而既然 ε 是任意的，

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n\right|_G \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}|\mathscr{E}_n|_G。$$

把这不等式与不等式(32)比較，可得等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n\right|_G = \sum_{n=1}^{\infty}|\mathscr{E}_n|_G, \tag{39}$$

于是証明了定理。注意 $\mathscr{E}_n$ 及其和是可测的，可以把上式写成

$$G(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3+\cdots)=G(\mathscr{E}_1)+G(\mathscr{E}_2)+ \\ +G(\mathscr{E}_3)+\cdots。\tag{40}$$

現在考察在諸集合 $\mathscr{E}_n$ 中至少有一个无界集合的情形。設 γ_n 是以原点为中心以 n 为半徑的閉圓。考察集合

$$\mathscr{E}_n^{(1)}=\mathscr{E}_n\gamma_1,\ \ \mathscr{E}_n^{(2)}=\mathscr{E}_n(\gamma_2-\gamma_1);\ \ \mathscr{E}_n^{(3)}=\mathscr{E}_n(\gamma_3-\gamma_2);\cdots$$

这一切都是有界的，并且是可测的，因为閉集合 γ_1 与閉集合的差 $\gamma_k-\gamma_{k-1}$ 都是可测集合，而可测集合的交也是可测的。我們可以把每个集合 $\mathscr{E}_n$ 表示成互无公点的有界可测集合的和：

$$\mathscr{E}_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}_n^{(k)},$$

而依上面所証明过的，得

$$|\mathscr{E}_n|_G=\sum_{k=1}^{\infty}|\mathscr{E}_n^{(k)}|_G。\tag{41}$$

集合 $\mathscr{E}_n$ 的和 $\mathscr{E}$ 可以表示成有界集合 $\mathscr{E}_n^{(k)}$ 的双重和，而后者彼此无公点，其中也可能有空集合：

$$\mathscr{E}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}_n^{(k)}。$$

依上面所証的，得

$$|\mathscr{E}|_G=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\mathscr{E}_n^{(k)}|_G。$$

非負項的和中諸項次序无关紧要 [I, 134]。可以先就 k，后就 n 取和。注意(41)，并据公式(39)，可以完全証明这定理。

注 如果改变假設，不令可测集合 $\mathscr{E}_n$ 是彼此无公点的，那末

依定理 8 它們的和仍是可測的，但(40)必須改成不等式

$$G(\mathscr{E}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} G(\mathscr{E}_n)。\qquad (40_1)$$

这乃是因为可測集合的測度就是它的外測度。如果每一集合 $\mathscr{E}_n$ 的測度都是零，那末依 (40_1) $G(\mathscr{E}) \leqslant 0$。但測度不能是負的，因此 $G(\mathscr{E})=0$，这就是說，有穷多或可数无穷多个測度为零的集合之和仍是測度为零的。

对于測度无穷的集合上述的定理也仍成立。在下面的定理中关于这点須稍有保留。

定理 14. 如果 A 与 B 是可測的，而 $B \subset A$，并且 B 的測度有穷，那末

$$G(A-B)=G(A)-G(B)。\qquad (42)$$

差 $A-B=D$ 依定理 12 是可測的。$A=B+D$，而 B 与 D 互无公点。依定理 13 $G(A)=G(B)+G(D)$，而从两側減去有穷数 $G(B)$，可得(42)。

定理 15. 如果 $\mathscr{E}_n (n=1, 2, \cdots)$ 是可測集合的不縮序列，那末，極限集合 $\mathscr{E}$ 也是可測的，而

$$G(\mathscr{E}) = \lim_{n\to\infty} G(\mathscr{E}_n)。\qquad (43)$$

$\mathscr{E}$ 的可測性直接由下面公式得出：

$$\mathscr{E} = \lim_{n\to\infty} \mathscr{E}_n = \mathscr{E}_1 + (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1) + (\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2) + \cdots。\qquad (44)$$

右边諸項互无公点，而如果一切 $\mathscr{E}_n$ 的測度都是有穷的，那末

$$G(\mathscr{E}) = G(\mathscr{E}_1) + [G(\mathscr{E}_2) - G(\mathscr{E}_1)] + \\ + [G(\mathscr{E}_3) - G(\mathscr{E}_2)] + \cdots。$$

前 n 項的和等于 $G(\mathscr{E}_n)$，所以由上式可得(43)。如果某一 $\mathscr{E}_n$ 有无穷測度，公式(43)是显然的。注意如此則須把 $G(\mathscr{E}_n)$ 及 $G(\mathscr{E})$ 都換成 $+\infty$。

定理 16. 如果 $\mathscr{E}_n (n=1, 2, \cdots)$ 是具有有穷測度的集合的不

漲序列，那末極限集合 $\mathscr{E}$ 也是可測的，并且公式(43)成立。

把 $\mathscr{E}_1$ 表示成互无公点集合的和：

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}+(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)+(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3)+(\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4)+\cdots。\qquad(45)$$

$\mathscr{E}$ 的可測性可由定理 8 及 14 得出。把定理 13 及 14 应用到(45)，可得

$$G(\mathscr{E}_1)=G(\mathscr{E})+[G(\mathscr{E}_1)-G(\mathscr{E}_2)]+$$
$$+[G(\mathscr{E}_2)-G(\mathscr{E}_3)]+[G(\mathscr{E}_3)-G(\mathscr{E}_4)]+\cdots,$$

就是說

$$G(\mathscr{E}_1)=G(\mathscr{E})+G(\mathscr{E}_1)-\lim_{n\to\infty}G(\mathscr{E}_n),$$

于是得(43)。

注 極限集合 $\mathscr{E}$ 的可測性也可以不必假設 $\mathscr{E}_n$ 的測度有穷而由(45)推出。

37. 可測集合(續) 我們列舉由上面証过的关于可測集合的定理得出的一些推論。初等圖形 R 既然是有穷多区間之和，它自然是可測集合，而其測度等于它的外測度，由公式(25)表示，其中 $\Delta_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 是把 R 分解所得的互无公点的区間。用 L_G 表凡可測集合的族，其中記号 G 指示原来用以建立这族的函数 $G(\Delta)$。上面已把函数 $G(\Delta)$ 扩展到凡屬于 L_G 的集合 $\mathscr{E}$ 上去，而所得的函数 $G(\mathscr{E})$ 仍是非負的，而依定理 13，加法性不仅对于有穷多項，而凡对于可数无穷多項互无公点集合的和都成立。令 $\mathscr{E}_n$ 表屬于 L_G 的集合的零序列，又令它們的測度都是有穷的，这就是說 $\mathscr{E}_1\supset\mathscr{E}_2\supset\mathscr{E}_3\supset\cdots$，而 $\mathscr{E}_n$ 的極限集合 $\mathscr{E}$ 是空的。由定理 16 直接可知 $G(\mathscr{E}_n)\to 0$，就是說函数 $G(\mathscr{E})$ 对于 L_G 不仅是非負的、加法的，并且是正常的。为了表明加法性对于 L_G 中的集合不仅适用于有穷多項之和，而且适用于可数无穷多項的和，我們說这函数是完全加法的。族 L_G 也包含无界集合。这些集合中有些是有有穷測度的，但

也有些的測度等于 $+\infty$。但并非一切无界集合都是可測的。有时在作可測集合族时只考慮有界集合，或是屬于确定的有穷区間之內的集合。在上面我們并沒有以此条件自限。还要注意，我們曾設出發的函数 $G(\Delta)$ 对于一切有穷区間都有定义。如果 $G(\Delta)$ 只对屬于某区間 Δ_0 的一切区間 Δ 定义，那末可以把它扩張到一切区間 Δ 上去，这只須用公式 $G(\Delta)=G(\Delta\cdot\Delta_0)$，并注意两区間的交仍是区間。

集合族 L_G 是与出發函数 $G(\Delta)$ 的选擇有关的。但对于这函数的任意选擇，这族总是包括一切区間、初等圖形、开集合及閉集合。下面我們将給出为一切 L_G 公有的集合的更完备的特征。我們将把集合函数解释成質量。給出初始函数 $G(\Delta)$ 就是給出在任意区間 Δ 上的質量，并設这質量滿足平常的条件：即非負性、加法性、及正常性。所謂点集合 $\mathscr{E}$ 可測，是指"在 $\mathscr{E}$ 上的質量"是有意义的，而 $G(\mathscr{E})$ 就是这質量。可以举簡單的例，使集合 L_G 包含平面上的一切点集合。設質量 1 集中在 P 点处。如果区間 Δ 包含点 P，那末 $G(\Delta)=1$，而如果区間 Δ 不包含 P，則 $G(\Delta)=0$。不难看出，对于这函数 $G(\Delta)$，族 L_G 包含一切点集合，而如 $\mathscr{E}$ 含 P 則 $G(\mathscr{E})=1$，$\mathscr{E}$ 不含 P 則 $G(\mathscr{E})=0$。

考察重要的特例，即 $G(\Delta)$ 等于区間 Δ 的面积。在这情形中族 L_G 可以簡表成 L。如此可以把面积概念推广到很寬广的集合族 L 上。这特例首先由法国数学家勒貝格所考察。在这情形中函数 $G(\mathscr{E})$ 可以用記号 $m(\mathscr{E})$ 表示。集合族 L 平常叫做依勒貝格可測的集合族。对于这些集合，談它的"面积"是有意义的。如果 $\mathscr{E}$ 是有穷的或可数无穷的点集合，那末 $m(\mathscr{E})=0$。同样，如果 $\mathscr{E}$ 是直綫綫段或是整个直綫，那末 $m(\mathscr{E})=0$。如果同一区間 Δ 或取成开的，或半开的，或閉的，則 $m(\Delta)$ 的值是相同的。如果可測集合 $\mathscr{E}$ 有內点，則显然 $m(\mathscr{E})>0$。可以証明，存在有界开集合，其界 l

的测度 $m(l)>0$（l 是閉的，从而是可测的）。对于开集合 O，$m(O)$ 等于凡出現于公式 (21) 的区間面积之和，而这和与把 O 表示成区間的和的方式无关。如果 F 是有界閉集合，那末把它用开区間 Δ_0 复盖，可以把 $m(F)$ 确定为两开集合的测度值之差：$m(F)=$ $=m(\Delta_0)-m(\Delta_0-F)$。

整个作族 L_G 的方法可以与以上一样地施行于任意有穷維的空間中。取其特例，則在三維空間中族 L 是凡有确定"体积"的集合之族，而在一維的情形中，这乃是凡具有确定"長度"的集合之族。在具有任意有穷維数的空間中，如果集合屬于 L，則无所謂体积等等名称而一律称做测度。

38. 可测性的鑒定法 可以給可测集合以种种定义，都与上述的同效。現在举出一些这类定义，但首先以有界集合为限。

定理 1. 有界集合 $\mathscr{E}$ 屬于族 L_G 的必要且充分的条件乃是对于任意預給的正数 ε 必存在一初等圖形 R，滿足

$$\mathscr{E}+e_1=R+e_2, \tag{46}$$

而集合 e_1 与 e_2 滿足下列不等式：

$$|e_1|_G\leqslant\varepsilon,\quad |e_2|_G\leqslant\varepsilon。 \tag{47}$$

先証明必要性。令 $\mathscr{E}$ 屬于 L_G。那末必存在开集合 O，使 $\mathscr{E}\subset O$，而 $|O-\mathscr{E}|_G\leqslant\varepsilon$。令 $O-\mathscr{E}=e_1$，則 $O=\mathscr{E}+e_1$，而对于 e_1，不等式(47)成立。另一方面，依[33]的定理 5，O 是元素集合 R_n 所組成的濵序列的極限，R_n 表示公式(21)右边的前 n 項之和。依定理 15 得 $G(O)=\lim\limits_{n\to\infty}G(R_n)$，所以可以取足够大的值 $n=m$，使当 $R=R_m$ 时得 $O=R+e_2$，而 $|e_2|_G\leqslant\varepsilon$。比較上面得出的两个表示 O 的方式，可得公式(46)，并且其中的 e_1 与 e_2 确滿足不等式(47)。再証明充分性。設对于任意預先給定的正数 ε (46)与(47)成立。旣然 R 是可测的，必存在开集合 O_1，使 $R\subset O_1$，而 $|O_1-R|_G\leqslant\varepsilon$。另一方面，依定理 4 存在开集合 O_2，滿足 $e_2\subset O_2$ 与 $|O_2|_G\leqslant|e_2|_G+\varepsilon$，

所以依(47) $|O_2|_G \leqslant 2\varepsilon$。开集合 $O=O_1+O_2$ 复盖 $\mathscr{E}+e_1$，因而

$$O-\mathscr{E}\subset[O-(\mathscr{E}+e_1)]+e_1,$$

而依[31]的(6)，

$$O-\mathscr{E}\subset[(O_1+O_2)-(R+e_2)]+e_1\subset(O_1-R)+$$
$$+(O_2-e_2)+e_1。$$

注意 $|O_1-R|_G\leqslant\varepsilon$，$|O_2-e_2|_G\leqslant|O_2|_G\leqslant 2\varepsilon$，及(47)，可知 $|O-$ $-\mathscr{E}|_G\leqslant 4\varepsilon$，而既然 ε 是任意的，得 $\mathscr{E}$ 是可测的。

定理 2. 有界集合 $\mathscr{E}$ 屬于 L_G 的必要且充分的条件乃是对于任意預定的正数 ε 必存在初等圖形 R，使

$$|\mathscr{E}-R|_G\leqslant\varepsilon,\quad |R-\mathscr{E}|_G\leqslant\varepsilon。\tag{48}$$

証明其必要性。令 $\mathscr{E}$ 屬于 L_G。那末存在初等圖形 R，满足(46)及(47)。不等式(48)可以由显然的关系 $\mathscr{E}-R\subset e_2$ 及 $R-$ $-\mathscr{E}\subset e_1$ 得出。設对于任意預定的正数 ε 存在初等圖形 R 滿足不等式(48)。那末如果令 $\mathscr{E}-R=e_2$ 而 $R-\mathscr{E}=e_1$ 則得 $\mathscr{E}+e_1=R+$ $+e_2$，而 e_1 及 e_2 满足不等式(47)，至于 $\mathscr{E}$ 的可測性則由定理1可以得知。

定理 3. 集合 $\mathscr{E}$（可以是无界的）屬于 L_G 的必要且充分的条件乃是对于任意預定的正数 ε 存在开集合 O 及閉集合 F，满足

$$F\subset\mathscr{E}\subset O\quad 及\quad |O-F|_G\leqslant\varepsilon。\tag{49}$$

如果 $\mathscr{E}$ 是可測的，那末依定义及[36]的定理11，存在閉集合 F 及开集合 O，满足 $F\subset\mathscr{E}\subset O$ 与 $|\mathscr{E}-F|_G\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$|O-\mathscr{E}|_G\leqslant$ $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。此外，$O-F=(O-\mathscr{E})+(\mathscr{E}-F)$，由此可得(49)。反之，設(49)成立。如此則 $|O-\mathscr{E}|_G\leqslant\varepsilon$，而依定义 $\mathscr{E}$ 是可測的。

再举一个可測性的鑒定法而不加証明。$\mathscr{E}$ 是可測集合的必要且充分的条件乃是对于任意集合 A，下面公式成立：

$$|A|_G=|A\cdot\mathscr{E}|_G+|A-\mathscr{E}|_G。\tag{50}$$

39. 集合体 現在介紹关于点集合組的一个新观念。所謂集合体，是指具有下列性質的集合族：（1）如果集合 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 屬于这族，那末它們的差 $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ 也在这族中；（2）如果 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 互无公点，并都在这族中，那末它們的和 $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ 也屬于这族。

由定义可以得出一些直接推論来。空集合既是屬于那族的一个集合与它自己的差，那末它一定屬于任意集合体。又从 [31] 的公式

$$\mathscr{E}_1\cdot\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1-(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2);\quad \mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1+(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1),$$

直接可得：族中两集合的交以及族中两有公点集合的和也都屬于这族。这命題显然可以推广到任意多有穷个集合之交与和上去，就是說：屬于体的有穷多个集合的交与和都屬于这体。

現在加强集合体定义中的第二条件，就是設凡可数无穷多个互无公点并屬于这体的集合之和仍屬于这体。如此的集合体叫做閉体。这就是說，所謂閉的集合体是指具有下列两性質的集合族：（1）如果集合 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2$ 屬于这族，其差 $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ 也屬于这族；（2）如果有穷多或可数无穷多个互无公点的集合 $\mathscr{E}_n$ 都屬于这族，則它們的和也屬于这族。与以前一样可証明：閉体中任意有穷多个集合的交与和也屬于这体。現在証明，其中可数无穷多集合的和与交也必屬于这閉体。为了証明这点，只須引用下列公式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n=\mathscr{E}_1+(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)+[\mathscr{E}_3-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)]+\\+[\mathscr{E}_4-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3)]+\cdots \tag{51}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n=\mathscr{E}_1-[(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)+(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3)+\\+(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_4)+\cdots]。 \tag{52}$$

这两公式的証明并不难。只須証明凡屬于式右边的集合的点必屬于式左边的集合，反之凡屬于式左边的集合的点也必屬于式右边的集合。令 $\mathscr{E}_n$ 屬于閉的集合体 T。如此則 (51) 式右边諸項彼

此互无公点，并都属于 T。所以依闭体 T 的定义，$\mathscr{E}_n$ 的和也属于 T。(52)式右边方括号中諸項都在 T 中，因此它們的和也屬于 T。所以整个右边属于 T，就是説諸集合 $\mathscr{E}_n$ 的交属于 T，于是得証。

由[36]所証者直接得知 L_G 是一集合的閉体。考察区間函数 $G(\Delta)$，并推广它到閉体 L_G 上。区間的族并不是体，因为两区間之差已不是区間了。初等圖形 R 的族是体，但不是閉体。我們扩展函数 $G(\Delta)$ 的方法乃是首先扩展它到初等圖形体上去，然后再延展它到閉体 L_G 上去。所得的函数 $G(\mathscr{E})$ 在 L_G 中是非負的、完全加法的、正常的，这些形容詞的涵义是依照[37]中所規定的。現在揭示出集合函数的正常性与加法性間的关系。

令 T 是一集合体，設它可能是非閉的。对于凡屬于 T 的集合定义的函数 $G(\mathscr{E})$ 叫做在 T 中完全加法的，是指它滿足下列条件：如果集合 $\mathscr{E}$ 屬于 T，并且它是有穷多或可数无穷多个屬于 T 的集合 $\mathscr{E}_n$ 的和，并且 $\mathscr{E}_n$ 互无公点，那末

$$G(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\cdots)=G(\mathscr{E}_1)+G(\mathscr{E}_2)+\cdots。$$

前面已經提到过完全加法函数的概念。在完全加法函数与正常函数两概念之間有直接的关系，由下列定理表示出来。

定理　在某集合体 T 上定义并只取有穷值的函数 $G(\mathscr{E})$ 是加法的与正常的之必要且充分条件乃是它是完全加法的。

由加法性可知，如果 $A\subset B$，則 $G(B-A)=G(B)-G(A)$。設函数 $G(\mathscr{E})$ 是加法的与正常的，現在証明它是完全加法的。設 $\mathscr{E}$ 是可数无穷多个互无公点的集合 $\mathscr{E}_n$ 之和 $(n=1,2,\cdots)$。可以写成

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\cdots+\mathscr{E}_n+[\mathscr{E}-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\cdots+\mathscr{E}_n)],$$

而由于这函数的加法性，可知

$$G(\mathscr{E})=G(\mathscr{E}_1)+\cdots+G(\mathscr{E}_n)+$$
$$+G[\mathscr{E}-(\mathscr{E}_1+\cdots+\mathscr{E}_n)]。\qquad(53)$$

但 $\mathscr{E}-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\cdots+\mathscr{E}_n)$ 是零序列。由等式(53)取極限值并利

用正常性，可得

$$G(\mathscr{E})=\lim_{n\to\infty}[G(\mathscr{E}_1)+\cdots+G(\mathscr{E}_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}G(\mathscr{E}_n)。$$

这証明了 $G(\mathscr{E})$ 是完全加法的。現在反之，設 $G(\mathscr{E})$ 是完全加法的，而証明它是正常的。令 $\mathscr{E}'_1\supset\mathscr{E}'_2\supset\cdots$ 是某一零序列。須要証明 $G(\mathscr{E}'_n)\to 0$。因为

$$\mathscr{E}'_1=(\mathscr{E}'_1-\mathscr{E}'_2)+(\mathscr{E}'_2-\mathscr{E}'_3)+\cdots+(\mathscr{E}'_{n-1}-\mathscr{E}'_n)+\mathscr{E}'_n,$$

和中諸項彼此无公点，所以由于 $G(\mathscr{E})$ 的加法性，得

$$G(\mathscr{E}'_n)=G(\mathscr{E}'_1)-[G(\mathscr{E}'_1-\mathscr{E}'_2)+ \\ +G(\mathscr{E}'_2-\mathscr{E}'_3)+\cdots+G(\mathscr{E}'_{n-1}-\mathscr{E}'_n)]。\qquad (54)$$

另一方面，由公式

$$\mathscr{E}'_1=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{E}'_k-\mathscr{E}'_{k+1})$$

并由 $G(\mathscr{E})$ 的完全加法性可知

$$G(\mathscr{E}'_1)=\sum_{k=1}^{\infty}G(\mathscr{E}'_k-\mathscr{E}'_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}G(\mathscr{E}'_k-\mathscr{E}'_{k+1}),$$

与(54)比較可知 $G(\mathscr{E}'_n)\to 0$，这正是所要証的。以前我們曾扩展非負的、加法的、正常的区間函数 $G(\Delta)$ 到閉体 L_G 上去，而如此得出的函数 $G(\mathscr{E})$ 是完全加法的。可以証明，把 $G(\Delta)$ 扩展到 L_G 上去并保存完全加法性的其他方法是沒有的。

40. 与坐标軸的选擇无关 关于測度之与坐标軸的选擇无关，还須作些說明。初始函数 $G(\Delta)$ 是定义于各边平行于 X 軸与 Y 軸的半开矩形之上。

体 L_G 包含平面上边的方向为任意的半开矩形，因为凡这样的矩形是一閉矩形与由其两边及三頂点所組成的閉集合的差。特別，函数 $G(\mathscr{E})$ 也定义于各边平行于另一笛卡尔坐标系的軸 X' 与 Y' 的一切半开矩形 Δ'，而函数 $G(\Delta')$ 在这些矩形上是加法的与正常的。如果取新坐标軸 X' 与 Y'，那末从函数 $G(\Delta')$ 出發，可与以前

一样地把它扩張到某一体 $L_{G'}$ 上去。不难証明体 $L_{G'}$ 与体 L_G 重合，而在新的扩展之下，即从 $G(\Delta')$ 出發，所得对于一切区間的値 $G(\mathscr{E})$ 与从 $G(\Delta)$ 出發而得的完全一样。这結論的基础在于下面的事实：即凡开集合 O 可以表示成互无公点的区間 Δ_k 之和，也可以表成互无公点的区間 Δ'_k 之和，而且

$$G(O)=\sum_{k=1}^{\infty} G(\Delta_k)=\sum_{k=1}^{\infty} G(\Delta'_k)。$$

由此，依 [35] 的定理 4 直接可得，在两坐标系中任意集合的外测度是相同的。于是由可测性的定义可知在两坐标系中可測集合是一样的，就是說 $L_{G'}$ 与 L_G 两体相重合。在两坐标系中测度的相等，是因为依上面証过的定理，$G(\mathscr{E})$ 是凡复盖 $\mathscr{E}$ 的开集合测度的下确界。再注意，如果 $G(\Delta)$ 是矩形 Δ 的平常面积，也就是勒貝格測度 $m(\Delta)$，那末 $G(\Delta')$ 也是 Δ' 的面积[比較 II;92]。

41. 体 B　以前曾指出，閉体 L_G 与函数 $G(\Delta)$ 的选擇有关。現在指出一閉体，其中的集合都屬于任意閉体 L_G，特别也屬于 L。考察所有包括一切閉区間的閉体 T，作凡屬于一切閉体 T 的集合的族 B。不难看出集合族 B 是一个閉体。事实上，如果 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 屬于 B，那末它們也屬于上述的一切閉体 T，因此其差 $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ 屬于一切 T，从而也屬于 B。同理可証明閉体定义中的第二条件。如此閉体 B 是凡包括一切閉区間的閉体之公共部分。这閉体 B 显然含于一切 L_G 之內，因为 L_G 都是含一切閉区間的閉体。凡开集合都可以表示成可数无穷多个閉区間之和，这在[33]中已看到，因此閉体 B 包含一切开集合。凡閉集合 F 都是某一开集合 O 的补集合，从而是全平面(开集合)与开集合 O 之差，因此体 B 包括一切閉集合。集合体 B 在勒貝格之前已首先为法国数学家波埃勒所考察过。凡屬于体 B 的集合叫做 B 可測的集合，或叫做依波埃勒可測的集合。

体 B 也可以用另外方式定义：卽所謂集合 $\mathscr{E}$ 属于体 B，是指它可以由閉区間經使用下列两种运算有穷多次或可数无穷多次而得出：（1）由可数无穷多或有穷多已得的集合作和；（2）由可数无穷多或有穷多已得的集合作交。这定义还須要几点解释，現在我們暫不詳述。我們也不去証明体 B 的新定义与旧定义同値。在本节末尾且証明两个簡單定理。

定理 1. 如果 $\mathscr{E}$ 是 L_G 中的任意集合，那末必存在两个集合 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2$，这两集合都屬于体 B（于是也屬于体 L_G），并且

$$\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{E}_2, \quad G(\mathscr{E}_1) = G(\mathscr{E}_2) = G(\mathscr{E})。 \tag{55}$$

我們知道，旣然集合 $\mathscr{E}$ 屬于 L_G，必存在閉集合 F_n 及开集合 O_n，滿足

$$F_n \subset \mathscr{E} \subset O_n;\ G(\mathscr{E} - F_n) \leqslant \frac{1}{n};$$

$$G(O_n - \mathscr{E}) \leqslant \frac{1}{n}。 \tag{56}$$

集合 F_n 与 O_n 屬于体 B。所以，依閉体的定义，可知諸集合 F_n 的和与諸集合 O_n 的交都屬于体 B：

$$\mathscr{E}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n; \quad \mathscr{E}_2 = \prod_{n=1}^{\infty} O_n。 \tag{57}$$

注意 $F_n \subset \mathscr{E} \subset O_n$，所以 $\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{E}_2$。此外，$\mathscr{E} - \mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E} - F_n$ 而 $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E} \subset O_n - \mathscr{E}$，所以 $G(\mathscr{E} - \mathscr{E}_1) \leqslant \frac{1}{n}$，$G(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}) \leqslant \frac{1}{n}$ 对于一切 n 都成立。但左边都与 n 无关，所以由上面不等式可得等式 (55)，而定理得証了。我們可以把这定理陈述如下：在 L_G 中的任一集合 $\mathscr{E}$ 介于两个屬于体 B 并与 $\mathscr{E}$ 有相同测度的集合之間。

从体 B 中可以挑出一些我們以后将用到的集合族来。

定义 集合 $\mathscr{E}$ 叫做 G_δ 集合，是指它是开集合，或是可数无穷多个开集合的交。

首先注意，在[33]中已曾提及，可数无穷多开集合的交不一定是开集合。由 G_δ 集合的定义直接可知，有穷多或可数无穷多个 G_δ 集合的交仍是 G_δ 集合。現在証明凡閉区間 $\Delta[a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d]$ 是 G_δ 集合。事实上我們可以把它表示成开区間 $\Delta_n(a-\varepsilon_n<x<$ $<b+\varepsilon_n;\ c-\varepsilon_n<y<d+\varepsilon_n)$ 的交，而 ε_n 是趋向于零的正数序列。不难証明，凡閉集合是 G_δ 集合。由上面定理的証明直接可得下面的結論：

定理 2. 凡可測集合 $\mathscr{E}$ 可以为一 G_δ 型的集合 H 所复盖，并且 H 满足 $G(\mathscr{E})=G(H)$。

还要注意，如果 $\mathscr{E}$ 屬于閉区間 Δ 之中，那末可以取复盖集合 H，使它也屬于 Δ 之中。事实上，如果 H 是 G_δ 集合，而 H 复盖 $\mathscr{E}$，并满足条件 $G(\mathscr{E})=G(H)$，那末集合 $H'=H\Delta$ 也是 G_δ 集合，并复盖 $\mathscr{E}$，且满足条件 $G(\mathscr{E})=G(H')$，而 H' 也包含于 Δ 中。

42. 一个变数的情形　測度論在一个变数的情形采取了較簡單的形式。半开区間的非負、加法、正常函数是由不減点函数 $g(x)$ 依下式得出的：

$$G(\Delta)=G\ ((a,\ b])=g(b+0)-g(a+0)。$$

由这函数 $G(\Delta)$ 出發，如以上一样，可以作出集合函数 $G(\mathscr{E})$，这函数对于一切屬于 L_G 的集合有定义。如果 $\mathscr{E}$ 是屬于 L_G 的集合，值 $G(\mathscr{E})$ 叫做 $g(x)$ 在集合 $\mathscr{E}$ 上的改变量。如果 $g(x)=x$，那末可得依勒貝格可測的集合，而且 $G(\mathscr{E})$ 是这些集合的推广的長度概念。如果 $g(x)$ 只定义于某一区間内，那末它可以推广到全軸上，与以前所說的一样。

用新变数 t 代換旧变数 x：

$$t=g(x),\tag{58}$$

并且这个代換要这样来理解：如果在某点 x 处，函数 $g(x)$ 是連續的，那末相应值 t 由公式 (58) 定义。如果 x 是間断点，那末

值 x 与变数 t 的相应閉区間 $[g(x-0), g(x+0)]$ 相对应。如此变数 x 的半开区間 $(a, b]$ 变成半开区間 $(g(a+0), g(b+0)]$，而当 $g(b+0)=g(a+0)$ 时上面半开区間变成一点。如果 e_x 是 x 軸上某集合，而 e_t 是軸 t 上相应集合，那末可以証明，依 $g(x)$ 作的 e_x 外測度等于依勒貝格的 e_t 外測度，卽是依据半开区間長度概念而作的 e_t 外測度。在一个变数情形中初等圖形是有穷多个互无公点的半开区間之和，而引用[35]中的定理1，不难証明，如果 e_x 是可測的，e_t 也是可測的，而且显然 e_x 依 $g(x)$ 的測度等于集合 e_t 的勒貝格測度。

§2. 可測函数

43. 可測函数的定义 本节及以下几节的任务是作出某一函数类，并研究这些函数的性質。以后将基于这类函数而下积分的一般定义。在叙述中将設作为測度論基础的函数 $G(\Delta)$ 是以某种方式固定了的，也就是說将考察某一确定体 L_G。这可能是依勒貝格可測的集合的体 L。令在可測集合 $\mathscr{E}$ 上給出点函数 $f(P)$ 来，并設这函数取实数值。这些值可能是有穷的，也可能是无穷的，就是說函数 $f(P)$ 除了取有穷值外也可以取值 $+\infty$ 及 $-\infty$。現在介紹下面的記号。用記号 $\mathscr{E}[f>a]$ 表 $\mathscr{E}$ 中滿足 $f(P)>a$ 的一切点 P 所成的集合。同样用記号 $\mathscr{E}[f\leqslant a]$ 表 $\mathscr{E}$ 中滿足 $f(P)\leqslant a$ 的一切点 P 所成的集合。如果 $f(P)$ 与 $g(P)$ 是两个函数，那末記号 $\mathscr{E}[f=g]$ 表示 $\mathscr{E}$ 中滿足 $f(P)=g(P)$ 的一切点 P 所成的集合。

定义 定义于可測集合 $\mathscr{E}$ 上的函数 $f(P)$ 叫做可測的，是指对于任意实数 a，諸集合

$$\mathscr{E}[f\geqslant a];\ \mathscr{E}[f<a];\ \mathscr{E}[f>a];\ \mathscr{E}[f\leqslant a] \qquad (1)$$

都是可測的。首先証明下面定理：

定理 1. 为了諸集合（1）对任意的 a 可测，只須其中一个集合是对任意 a 可测的。

集合 $\mathscr{E}[f\geqslant a]$ 与 $\mathscr{E}[f<a]$ 是相补的集合，而对于任意的 a，其中一个的可测性与另一个的可测性是同效的。同理（1）中第三个集合的可测性与第四个的可测性是同效的。現在証明由第三个集合对于任意 a 的可測性可推知其他集合的可测性。事实上，由第三个集合的可测性可知第四个集合的可测性。那末集合 $\mathscr{E}[f=a]$ 也是可測的了，因为它可以表示成

$$\mathscr{E}[f=a]=\mathscr{E}[f\leqslant a]\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}\left[f>a-\frac{1}{n}\right]。$$

这是因为可数无穷多可測集合的交仍是可测的。最后，第一集合的可测性可以由下面公式看出来：

$$\mathscr{E}[f\geqslant a]=\mathscr{E}[f>a]+\mathscr{E}[f=a]。$$

再注意，集合 $\mathscr{E}[f=+\infty]$ 与集合 $\mathscr{E}[f=-\infty]$ 可以表示成

$$\mathscr{E}[f=+\infty]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}[f>n];$$

$$\mathscr{E}[f=-\infty]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}[f<-n]。$$

注意只須知道集合（1）对于一切有理数 a 可測就足以推知它們对于一切 a 值可測。事实上任意无理数 a 可以表示成有理数 a_n 的减序列，而 $\mathscr{E}[f>a]$ 的可测性可由下面公式得出：

$$\mathscr{E}[f>a]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}[f>a_n]。$$

現在叙述可測函数一系列的性質，它們都可以由上面的定义直接得出。

定理 2. 如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上是可測的，那末它在 $\mathscr{E}$ 的任意可測部分 $\mathscr{E}'$ 上也是可测的。如果 $f(P)$ 在有穷多或可数无穷多集合 $\mathscr{E}_n$ 上可測，而这些集合彼此无公点，那末这函数在諸集合 $\mathscr{E}_n$ 的和

$\mathscr{E}$ 上也是可测的。

这些結論可由下面諸式看出：

$$\mathscr{E}'[f>a]=\mathscr{E}[f>a]\cdot\mathscr{E}';\quad \mathscr{E}[f>a]=\sum_n\mathscr{E}_n[f>a]。$$

定理 3. 如果 $\mathscr{E}$ 是测度为零的集合，那末任意函数 $f(P)$ 在它上面都是可测的。

事实上，对于任意实数 a，集合 $\mathscr{E}[f>a]$ 是 $\mathscr{E}$ 的部分，而后者是测度为零的，所以集合 $\mathscr{E}[f>a]$ 是测度为零的，从而也是可测的。

定义 两个定义在集合 $\mathscr{E}$ 上面的函数 $f(P)$ 及 $g(P)$ 叫做在这集合上相抵的，或簡称相抵，是指集合 $\mathscr{E}[f\neq g]$ 的测度等于零。关于相抵函数可証明下列定理。

定理 4. 如果 $f(P)$ 与 $g(P)$ 是在可测集合 $\mathscr{E}$ 上相抵的函数，而其中一个是可测的，那末另一个也是可测的。

依定理的条件，集合 $\mathscr{E}[f\neq g]=A$ 是测度等于零的可测集合。在可测集合 $\mathscr{E}'=\mathscr{E}-A$ 上 $f(P)=g(P)$。由 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的可测性可知 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}'$ 上可测，因此 $g(P)$ 在 $\mathscr{E}'$ 上可测。在集合 A 上函数 $g(P)$ 依定理 3 是可测的。如此依定理 2，$g(P)$ 在集合 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+A$ 上是可测的，而定理得証。

不难証明，如果 f_1 与 g_1 相抵，而 f_2 与 g_2 相抵，那末 f_1+f_2 与 g_1+g_2 相抵，并且 f_1f_2 与 g_1g_2 相抵，$f_1:f_2$ 与 $g_1:g_2$ 相抵，这里假設上述的运算是殆遍有意义的。

如果两个連續函数在某一区間上或在全平面上依勒貝格測度是相抵的，那末不难看出它們在一切点处有相同数值。事实上，如果在某点 P_0 处 $f(P_0)-g(P_0)>0$，那末依連續函数的定义可知这不等式在 P_0 的某一足够小的 ε 邻域 δ 中仍有效，并且 $m(\delta)>0$，但这与函数相抵性的定义矛盾了。

举可测函数的簡單例子。設 $f(P)$ 是在有穷閉区間 Δ_0 上連續

的。对于任意 a 考察集合 $\Delta_0[f(P)\geqslant a]$，并証明它是閉集合。由此可知它是可測的，于是 $f(P)$ 是連續函数。如果 $P_n(n=1,2,\cdots)$ 是 Δ_0 中的点序列，而其極限是 P，并且 $f(P_n)\geqslant a$，那末依連續函数的定义，$f(P)\geqslant a$，于是得証集合 $\Delta_0[f(P)\geqslant a]$ 是閉的。同理可証，如果 $f(P)$ 是在全平面上連續的，那末它是可測的。事实上，如果 Δ_0 是任意閉区間，那末上面已經証明 $\Delta_0[f(P)\geqslant a]$ 是可測的。增大 Δ_0 时極限集合仍是可測的。这極限集合恰是平面上滿足 $f(P)\geqslant a$ 的一切点所成的集合。

現在設 $f(P)$ 有一間斷点 P_0。把它用一开区間 Δ_n 序列 $(n=1, 2, \cdots)$ 来包括，并使这序列无限地縮于 P_0 点。在 Δ_n 外 $f(P)$ 是連續的，而在 Δ_n 之外凡滿足 $f(P)\geqslant a$ 的点 P 所成的集合 e_n 是閉的。令 n 增大則集合 e_n 不縮，并趋向于可測集合 e。如果 $f(P_0)\geqslant a$，还須把 P_0 点加到这集合中，于是得凡滿足 $f(P)\geqslant a$ 的点所成的集合，而依上面的推理这集合是可測的。同样推理可用于有穷多个間斷点的情形上，即具有有穷多个間斷点的函数是可測的。

現在陈述下列定理而不加証明：如果 $f(P)$ 在閉区間 Δ_0 上只取有穷值，而其間斷点所組成的集合是測度为零的；那末 $f(P)$ 在 Δ_0 上是可測的。但这个关于可測性的条件只是充分的。不难举出一例来，使集合 $\mathscr{E}$ 的一切点都是間斷点，而函数却仍是可測的。考察函数 $f(x)$，定义于区間 $[0,1]$ 上，并設当 x 是有理数时 $f(x)=0$，当 x 是无理数时 $f(x)=1$。取勒貝格測度，就是令 $G(\Delta)$ 表区間長度。依这測度，任意点的測度是零。区間 $[0, 1]$ 中的有理数是可数集合，而由于測度的完全加法性，有理点所成的集合是測度为零的。函数 $f(x)$ 与在这区間上恒等于 1 的函数只在有理点所成的集合上相差异，而这一集合的測度是零，所以 $f(x)$ 与恒等于 1 的函数相抵，从而依定理 4，$f(x)$ 是可測的。不难看出，凡区

間$[0,1]$中的点x_0都是函数$f(x)$的間断点。事实上，在x_0的任意ε邻域中必有有理点，也必有无理点x，这就是說在$x=x_0$的任意邻域中函数$f(x)$既取值0又取值1，因此x_0是它的間断点。在[46]中将說明可测性概念与連續性概念的更深刻的联系。

再考察所謂在可測集合上片段定值的函数，就是在$\mathscr{E}$上只取有穷多或可数无穷多不同数值$c_k(k=1, 2, \cdots)$的函数$f(P)$。如果$\mathscr{E}_k$表示凡滿足$f(P)=c_k$的点所成的集合，而$\mathscr{E}_k$是可測的，那末依可測性的定义直接可知片段定值的函数$f(P)$在$\mathscr{E}$上是可测的。再举一例。令$f(P)$在可測集合$\mathscr{E}$上是可測的。設它在补集合$C\mathscr{E}$上等于零。如此得的新函数在$\mathscr{E}$与$C\mathscr{E}$上都是可測的，所以依定理2它在全平面上是可测的。

再考察一个变数的情形。令$g(x)$是作为測度基础的不减函数，而$f(x)$是可測函数。有时我們說$f(x)$依$g(x)$是可測的，而如果$g(x)=x$，則簡單地說$f(x)$是可測的。

44. 可測函数的性質 再叙述一些可測函数的性質。

定理 1. 如果$f(P)$是可測函数，那末$|f(P)|$是可測函数。

这結論可由下列公式得出：

$$\mathscr{E}[|f|>a]=\mathscr{E}[f>a]+\mathscr{E}[f<-a]。$$

定理 2. 如果$f(P)$是可測函数，而c是有穷常数，并且$c\neq 0$，那末$c+f(P)$与$cf(P)$都是可測函数。

第一結論可以由下列公式看出：

$$\mathscr{E}[c+f(P)>a]=\mathscr{E}[f(P)>a-c],$$

而第二結論可以由下列公式看出：

当$c>0$时 $\mathscr{E}[cf(P)>a]=\mathscr{E}\left[f(P)>\frac{a}{c}\right]$,

当$c<0$时 $\mathscr{E}[cf(P)>a]=\mathscr{E}\left[f(P)<\frac{a}{c}\right]$。

定理 3. 如果$f(P)$与$g(P)$是可測函数，那末集合$\mathscr{E}[f>$

$>g]$ 是可測的。

把有理数附以足标而成序列：$r_1, r_2, \cdots$。定理中所述的集合的可測性可由下列公式看出：

$$\mathscr{E}[f>g]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{E}[f>r_k]\mathscr{E}[g<r_k]。$$

定理 4 如果 $f(P)$ 与 $g(P)$ 是可測函数，并且它們只取有穷值，那末函数 $f-g, f+g, fg$, 与 $\frac{f}{g}$（設 $g\neq 0$）是可測的。

差 $f-g$ 的可測性可以由公式

$$\mathscr{E}[f-g>a]=\mathscr{E}[f>a+g]$$

及定理 2 及 3 得出。和的可測性可以由公式 $f+g=f-(-g)$ 与定理 2（取 $c=-1$）得出。可測函数 f 的平方 f^2 的可測性可以直接由公式

$$\mathscr{E}[f^2>a]=\mathscr{E}[f>\sqrt{a}]+\mathscr{E}[f<-\sqrt{a}]$$

得出，而积 fg 的可測性可以由公式

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$$

得出。今在 g 不取零值的条件下証明函数 $\frac{1}{g}$ 的可測性。这可以由下列公式得出：

$$\mathscr{E}\left[\frac{1}{g}>a\right]=\mathscr{E}[g>0]\cdot\mathscr{E}\left[g<\frac{1}{a}\right]\quad(\text{当 } a>0 \text{ 时}),$$

$$\mathscr{E}\left[\frac{1}{g}>a\right]=\mathscr{E}[g>0]+\mathscr{E}\left[g>\frac{1}{a}\right]\quad(\text{当 } a<0 \text{ 时}),$$

$$\mathscr{E}\left[\frac{1}{g}>a\right]=\mathscr{E}[g>0]\quad(\text{当 } a=0 \text{ 时})。$$

最后由公式 $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$ 可得商的可測性。在上面定理中假設两函数 $f(P)$ 及 $g(P)$ 在集合 $\mathscr{E}$ 上只取有穷值是很重要的。在相反的情形下，对于这两函数所施的运算可能沒有意义。例如在某点

$f=+\infty$ 而 $g=-\infty$，那末在这点处和 $f+g$ 就沒有意义。如果沒有这种施于 f 与 g 上的运算的不确定性，那末也可以令 $f(P)$ 与 $g(P)$ 取无穷值。証明下列定理做例。

定理 5. 如果 $f(P)$ 与 $g(P)$ 是可測函数，并能取有穷值或值 $+\infty$，那末函数 $f+g$ 是可測的。

設 A 是凡滿足 $f(x)=+\infty$ 与 $g(x)=+\infty$ 中至少一式的点 x 所組成的集合。依 f 与 g 的可測性，这集合是可測的，而在集合 A 上和 $f+g$ 的值是常数 $(+\infty)$，所以是可測的。在集合 $\mathscr{E}'=$ $=\mathscr{E}-A$ 上函数 f 与 g 都取有穷值，而依定理 4，和 $f+g$ 在 $\mathscr{E}'$ 上是可測的。因此它在 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+A$ 上是可測的，于是定理証明了。

45. 可測函数的極限 本节中將討論可測函数的極限。基本的結果乃是可測函数的極限仍是可測函数。首先解釋关于極限概念的几点情况。設有实数序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, \tag{2}$$

其中的数可能有等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的。用 s_n 表示数集合 $[a_n, a_{n+1}, \cdots]$ 的下确界，t_n 表示它的上确界，就是說

$$s_n=\inf[a_n,\ a_{n+1},\ \cdots];\quad t_n=\sup[a_n,\ a_{n+1},\ \cdots]。\tag{3}$$

当 n 增大时，上面的集合变小，所以 s_n 不减，t_n 不增。如此，当无限地增大 n 时，單調序列 s_n 及 t_n 都有有穷或无穷的極限：

$$\lim_{n\to\infty} s_n=S;\quad \lim_{n\to\infty} t_n=T, \tag{4}$$

而依單調性，可知

$$S=\sup s_n;\quad T=\inf t_n,$$

并由 $s_n\leqslant t_n$ 可知 $S\leqslant T$。如果序列是 $+\infty, +\infty, \cdots$，可以規定它的極限等于 $+\infty$，同样序列 $-\infty, -\infty, \cdots$ 的極限規定等于 $-\infty$。数 S 叫做序列(2)的下極限，数 T 叫做这序列的上極限。現在証明一个輔助定理。

輔助定理 序列(2)有(有穷或无穷)極限的必要且充分的条件乃是 $S=T$,而如果这条件滿足,則極限值等于 S。

首先証明充分性。如果 $k\geqslant n$,則 $s_n\leqslant a_k\leqslant t_n$,而如果 s_n 与 t_n 的極限相同,就是說如果 $S=T$,那末 $a_n\to S$。現在証明必要性。設序列(2)有有穷極限 σ。当 n 足够大时一切数 a_n 都包含在区間 $(\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$ 之中,这里的 ε 表示任意預定的小正数。因此当 n 足够大时一切 s_n 及 t_n 也都包含于上述那区間之中。旣然 ε 是任意的,可知 $s_n\to\sigma$,而 $t_n\to\sigma$,就是說 $S=T=\sigma$。序列(2)有无穷極限的情形也可以类似地处理。現在証明可測函数序列的某些性質。

定理 1. 如果 $f_n(P)$ 是可測函数序列,那末 $f_n(P)$ 在集合 $\mathscr{E}$ 中任意点 P 的值的上下确界也是可測函数,就是說

$$\varphi(P)=\inf_n f_n(P), \quad \psi(P)=\sup_n f_n(P)$$

是可測的。

現在証明 $\varphi(P)$ 是可測函数以示例。如果在点 P 处 $\varphi(P)<a$,那末至少有一个 $f_n(P)$ 值 $<a$,而反之如果至少有一个函数值 $f_n(P)<a$,那末 $\varphi(P)<a$。如此可得:

$$\mathscr{E}[\varphi(P)<a]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}[f_n(P)<a],$$

由此,依函数 $f_n(P)$ 的可測性,可知 $\varphi(P)$ 是可測的。

定理 2. 如果可測函数序列 $f_n(P)$ 在集合 $\mathscr{E}$ 的每一点 P 处是單調增大的(或單調減小的),那末極限函数 $f(P)$ 也是可測的。

本定理由前一定理直接可以推出,因为如果函数序列是單調增大的,它的極限函数就是它的上确界函数 $\psi(P)$,而如果函数序列是單調減小的,它的極限函数就是它的下确界 $\varphi(P)$。

定理 3. 如果 $f_n(P)$ 是可測函数序列,那末这序列的下極限 $S(P)$ 与上極限 $T(P)$ 也是可測函数。

取函数

$$s_n(P)=\inf[f_n(P),f_{n+1}(P),\cdots];$$

$$t_n(P)=\sup[f_n(P),f_{n+1}(P),\cdots]。$$

依定理 1，这些函数是可测的。函数 $S(P)$ 与 $T(P)$ 各是單調序列 $s_n(P)$ 与 $t_n(P)$ 的極限函数，所以依定理 2，它們也是可测函数。

定理 4. 如果 $f_n(P)$ 是可测函数序列，并且这序列在集合 $\mathscr{E}$ 的每一点 P 处收斂；那末極限函数 $f(P)$ 是可测的。

$f(P)$ 的可测性可以由定理 3 直接推出，因为在每一点处 $f(P)$ 与 $S(P)$ 及 $T(P)$ 都相等。这定理对于以后是有基本重要性的，现在稍予推广如下。

所謂某某性質在集合 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立，是指除掉 $\mathscr{E}$ 中某一測度为零的部分以外，这性質在 $\mathscr{E}$ 中剩余的集合上成立。

定理 5. 如果 $f_n(P)$ 是 $\mathscr{E}$ 上可测函数的序列，并且这序列在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂，那末極限函数 $f(P)$ 是 $\mathscr{E}$ 上可测的函数。

注意極限函数 $f(P)$ 可能在集合 $\mathscr{E}$ 的某一部分 A 上无定义，而 A 的测度是零。在 A 上可以随意定义 $f(P)$。序列 $f_n(P)$ 在可测集合 $\mathscr{E}'=\mathscr{E}-A$ 的一切点处都收斂，所以依定理 4，$f(P)$ 在 $\mathscr{E}'$ 上是可测的。此外，依 [43] 的定理 3 它在 A 上也是可测的。所以 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+A$ 上也是可测的，而定理証明了。

現在再証明一个以后要用到的定理。

定理 6. 設 $\mathscr{E}$ 是具有有穷測度的可测集合，$f_n(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上可测函数的序列，而这些函数在 $\mathscr{E}$ 上殆遍取有穷值，并且在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于函数 $f(P)$，而 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上也是殆遍取有穷值的。那末对于任意預定的正数 ε，凡滿足不等式 $|f(P)-f_n(P)|\geqslant\varepsilon$ 的点所組成的集合的測度当 n 无限增加时趋近于零。

用 $\mathscr{E}_n$ 表示定理中所說的集合，就是說

$$\mathscr{E}_n=\mathscr{E}[|f(P)-f_n(P)|\geqslant\varepsilon]。$$

須要証明，$G(\mathscr{E}_n)\to 0$。取使 $f(P)$ 与 $f_n(P)$ 取无穷值的一切点所成的集合，与使 $f_n(P)$ 不收斂于 $f(P)$ 的一切点所成的集合：

$$A=\mathscr{E}[|f(P)|=+\infty];\quad A_n=\mathscr{E}[|f_n(P)|=+\infty];$$

$$B=\mathscr{E}[f_n(P)\text{不}\to f(P)]。$$

依定理的条件，这些集合的测度都是零。它們的和集合：

$$C=A+\sum_{n=1}^{\infty}A_n+B,$$

也必是测度为零的 [36]，卽 $G(C)=0$。如果 P_0 不屬于 C，那末 $f_n(P_0)$ 与 $f(P_0)$ 都是有穷值，而 $f_n(P_0)\to f(P_0)$。取集合

$$R_n=\sum_{k=n}^{\infty}\mathscr{E}_k,\quad S=\prod_{n=1}^{\infty}B_n。\tag{7}$$

序列 $R_n(n=1,2,\cdots)$ 是具有有穷测度的集合的不漲序列，因为 $\mathscr{E}$ 的测度是有穷的，又因 S 是 R_n 的極限集合，所以

$$G(R_n)\to G(S)。\tag{8}$$

現在証明 $S\subset C$，就是証明：如果 P_0 不屬于 C，那末 P_0 也不屬于 S。事实上，如果 P_0 不屬于 C，那末 $f_n(P_0)$ 与 $f(P_0)$ 是有穷值，而 $f_n(P_0)\to f(P_0)$，就是說有一数 N 存在，使当 $n>N$ 时 $|f(P_0)-$ $-f_n(P_0)|<\varepsilon$。由此可知当 $n>N$ 时 P_0 不屬于 $\mathscr{E}_n$，就是說 P_0 不屬于 R_n，只要 $n>N$，所以 P_0 不屬于 S。因此 $S\subset C$。但 $G(C)=0$，所以 $G(S)=0$，而依(8)，$G(R_n)\to 0$。但依公式(7)的第一式，$\mathscr{E}_n\subset R_n$，所以 $G(\mathscr{E}_n)\to 0$，这正是所要証的。

注 注意我們可以把集合 C 归并到一切 $\mathscr{E}_n$ 中。既然 $G(C)=0$，归并之后仍是 $G(\mathscr{E}_n)\to 0$，但在集合 $(\mathscr{E}-\mathscr{E}_n)$ 的一切点处不等式 $|f(P)-f_n(P)|<\varepsilon$ 能滿足。还有一定理，說明在可测函数的情形，函数序列的收斂在基本集合 $\mathscr{E}$ 的大部分上是到处一致的。以后我們不用这定理，所以只把它陈述如下：

令 $\mathscr{E}$ 是有有穷测度的可测集合，$f_n(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上可测函数的序列，这些函數在 $\mathscr{E}$ 上殆遍取有穷值，并在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于函数

$f(P)$，而 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上也是殆遍取有穷値的。那末对于任一正数 η 必存在一个包含在 $\mathscr{E}$ 中的閉集合 F，滿足 $G(\mathscr{E}-F)<\eta$，而 $f_n(P)\to f(P)$ 的收斂在 F 上是一致的[①]。

46. 性質 C 在第四卷中定义勒贝格积分时曾介紹殆連續函数的概念，可以証明这概念与可测函数概念是同效的。我們只陈述相应的結果，但在这里我們将察較在第四卷中所論更一般的情形，就是說函数是定义在可测集合之上，并不設它是有界的。首先介紹几个新概念。

定义在閉集合 F 上的函数 $f(P)$ 叫做在这集合中的 P_0 点处連續，是指对于任意給定的正数 ε 必存在一个正数 η，使 $P\in F$ 并且 $\in P_0$ 点的 η 鄰域时 $|f(P_0)-f(P)|\leqslant\varepsilon$。函数 $f(P)$ 叫做在閉集合 F 上連續，是指它在这集合的任一点处連續。注意依上面在一点处連續性的定义，任意函数在集合的孤立点 P_0 处总是連續的，所謂孤立点 P_0 就是說它有一 ε 鄰域，其中除 P_0 外不包含 F 的点。上面的方法也可以用来定义不一定是閉的任意集合上的連續函数。再介紹一个新概念，以与第四卷中的殆連續性概念相应。

定义 所謂定义于可测集合 $\mathscr{E}$ 上的函数 $f(P)$ 在这集合上具有性質 C，是指对于任意給定的正数 ε 必存在一个閉集合 $F\subset\mathscr{E}$，滿足 1° $G(\mathscr{E}-F)\leqslant\varepsilon$ 及 2° $f(P)$ 在 F 上連續。

性質 C 与可测性的同效曾首先于 1913 年为院士 H. H. 魯金所証明，今陈述成下列定理：

定理 如果函数 $f(P)$ 定义于具有有穷测度的可测集合 $\mathscr{E}$ 上，而它在 $\mathscr{E}$ 上殆遍取有穷値，那末这函数可测的必要且充分的条件是它在 $\mathscr{E}$ 上具有性質 C。

以后并用不到这定理，所以現在不去証它[②]。

47. 片段定値函数 現在定义一类在理論研究中極有用的函数。

定义 定义在可测集合 $\mathscr{E}$ 上的函数 $f(P)$ 叫做在这集合上片段定値的，是指它在 $\mathscr{E}$ 上只取有穷多或可数无穷多个不同数値。

---

① 譯者注：参照 H. H. 那湯松，实变函数論，中譯本，第四章。該書中 F 仅是可测集合。但依[36]的定理 II，不难用一含于 F 中的閉集合代替 F。

② 譯者注：参照 H. H. 那湯松，第四章。

設 $c_k (k=1, 2, \cdots)$ 是函数 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上所取的諸不同值，其中可能有 $+\infty$ 与 $-\infty$。显然函数 $f(P)$ 可測的必要且充分的条件乃是对于一切 k 凡滿足 $f(P)=c_k$ 的点 P 所組成的集合 $\mathscr{E}_k$ 是可測的[43]。以后我們只考察可測的片段定值函数。

介紹一新概念如下。如果 $\mathscr{E}'$ 是某一点集合，那末所謂这集合的特征函数 $\omega_{\mathscr{E}'}(P)$ 是指定义于全平面上，当 $P\in\mathscr{E}'$ 时等于 1，当 $P\in C\mathscr{E}'$ 时等于零的函数。任何片段定值函数 $f(P)$ 是特征函数的綫性組合：即当 $P\in\mathscr{E}$ 时，

$$f(P)=\sum_k c_k \omega_{\mathscr{E}_k}(P)。\tag{9}$$

显然特征函数 $\omega_{\mathscr{E}'}(P)$ 可測的必要且充分的条件乃是 $\mathscr{E}'$ 是可測集合。

現在証明凡可測函数可以看做是片段定值函数的極限。我們只限于討論非負的函数。

定理 1. 对于任一在可測集合 $\mathscr{E}$ 上的非負有界可測函数 $f(P)$ 必存在 $\mathscr{E}$ 上非負片段定值函数的增序列 $f_n(P)$，每个 $f_n(P)$ 只取有窮多不同值，并且这序列在整个 $\mathscr{E}$ 上一致收斂于函数 $f(P)$。

由于 $f(P)$ 是有界的，必有一正数 L，使 $0\leqslant f(P)<L$ 对于任一 $P\in\mathscr{E}$ 成立。把区間 $[0, L]$ 用点

$$x_k=k\frac{L}{2^n}\quad(k=1, 2, \cdots, 2^n-1),$$

分成 2^n 等份。取可測集合

$$\mathscr{E}_k^{(n)}=\mathscr{E}\left[k\frac{L}{2^n}\leqslant f(P)<(k+1)\frac{L}{2^n}\right],$$

而定义函数序列 $f_n(P)$ 如下：

$$f_n(P)=k\frac{L}{2^n}\quad 当\ P\in\mathscr{E}_k^{(n)}\ 时。\tag{10}$$

不难看出序列 $f_n(P)$ 滿足定理中的一切要求。所有函数 $f_n(P)$ 在

$\mathscr{E}$ 上只取有穷多个不同值。由 n 进到 $n+1$ 时，每个区間

$$\left[k\frac{L}{2^n},\quad (k+1)\frac{L}{2^n}\right]$$

分成两个：

$$\left[2k\frac{L}{2^{n+1}},\quad (2k+1)\frac{L}{2^{n+1}}\right]$$

及
$$\left[(2k+1)\frac{L}{2^{n+1}},\quad (2k+2)\frac{L}{2^{n+1}}\right],$$

而每个集合 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 分成两个集合

$$\mathscr{E}_k^{(n)}=\mathscr{E}_{2k}^{(n+1)}+\mathscr{E}_{2k+1}^{(n+1)}。$$

$f_n(P)$ 在整个 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 上都等于同一数 $k\frac{L}{2^n}$，而 $f_{n+1}(P)$ 在集合 $\mathscr{E}_{2k}^{(n+1)}$ 上也等于这个数，但在集合 $\mathscr{E}_{2k+1}^{(n+1)}$ 上則等于

$$k\frac{L}{2^n}+\frac{L}{2^{n+1}},$$

所以函数序列 $f_n(P)$ 是增序列。在任意集合 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 上

$$f_n(P)=k\frac{L}{2^n},$$

而
$$k\frac{L}{2^n}\leqslant f(P)<(k+1)\frac{L}{2^n}。$$

所以在凡屬于 $\mathscr{E}$ 的点 P 处，

$$0\leqslant f(P)-f_n(P)<\frac{L}{2^n}。$$

由此可知序列 $f_n(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上一致收斂于 $f(P)$。在下面定理中将考察 $f(P)$ 不一定是有界的情形。

定理 2. 設 $f(P)$ 是集合 $\mathscr{E}$ 上非負、可测的函数，并且它在 $\mathscr{E}$ 上只取有穷值，那末必存在增序列 $f_n(P)$，其中每个 $f_n(P)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的非負片段定值函数，而这序列一致收斂于 $f(P)$。

在这情形中用点

$$x_k=\frac{k}{2^n}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

把无穷区間$[0,+\infty)$分成部分。定义集合$\mathscr{E}_k^{(n)}=\mathscr{E}\left[\frac{k}{2^n}\leqslant f(P)<\right.$
$\left.<\frac{k+1}{2^n}\right]$及函数

$$f_n(P)=\frac{k}{2^n}\quad 当\ P\in\mathscr{E}_k^{(n)}\ 时。\tag{11}$$

与在上面定理中一样,可以証明序列$f_n(P)$滿足定理中一切要求。在函数$f(P)$无界的情形下函数$f_n(P)$可以取可数无穷多个不同数值。如果放弃一致近似的要求,可以仍令$f_n(P)$只取有穷多个不同値。此外,在下面定理中将把$+\infty$也算做函数$f(P)$的可能值。

定理 3. 对于凡在可测集合$\mathscr{E}$上的非负可测函数$f(P)$必存在增序列$\varphi_n(P)$,其中每一$\varphi_n(P)$是$\mathscr{E}$上非負片段定值函数,并只取有穷多个不同的有穷值,而这序列在$\mathscr{E}$的每点处收斂于$f(P)$。

除了在上面定理所用的集合$\mathscr{E}_k^{(n)}$外还引入集合$\mathscr{E}_0=\mathscr{E}[f(P)=$
$=+\infty]$,并定义函数序列$\varphi_n(P)$如下:

$$\varphi_n(P)=f_n(P)\quad 如果\ f_n(P)\leqslant n,$$

而$\varphi_n(P)=n$,如果$f_n(P)>n$或$P\in\mathscr{E}_0$。不难看出,函数$\varphi_n(P)$滿足定理中的一切条件。以后常要使用上面的定理。

48. 类 B 在[41]中曾介紹点集合的一个閉体,其中的集合屬于任意的集合体L_G。同样可以作出某一函数族,其中任意函数对于任意函數$G(\Delta)$的选择都是可测函数。

定义 定义于B可测的集合$\mathscr{E}$上的函数$f(P)$叫做B函数,是指对于任意实數a,集合

$$\mathscr{E}[f\geqslant a];\ \mathscr{E}[f<a];\ \mathscr{E}[f>a];\ \mathscr{E}[f\leqslant a]$$

都是B可測的。

由这定义直接可得:凡B函数对于任意选择的$G(\Delta)$都是可

测的。也可以用别的方式定义 B 函数，与在[41]中定义 B 可测集合时完全相似。考察凡具有下列两性質的一切可能的函数族：第一，这族包含一切在 $\mathscr{E}$ 上連續的函数，第二，如果这族包含函数序列 $f_n(P)$，而这序列在 $\mathscr{E}$ 的每点处收斂，那末这族也包含这序列的極限函数。所謂 B 函数族，乃是屬于具有上列两性質的一切函数族中的函数族。我們現在不去証明这一定义与前面定义的同效性。

現在講一下与上面定义相联系的一些細节。凡連續函数都是 B 函数，平常叫做屬于零类。如果函数 $f(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上每点收斂的連續函数序列的極限，而函数 $f(P)$ 自己不是連續函数，則我們說函数 $f(P)$ 屬于第一类。凡第一类中的函数都是 B 函数。如果函数 $f(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上到处收斂的第一类函数序列的極限函数，而函数 $f(P)$ 本身不是第一类函数，那末我們說这函数 $f(P)$ 屬于第二类。凡第二类的函数也是 B 函数。这种作法可以繼續。如果 $f_n(P)$ 都是屬于具有有穷序数的类中的函数，而 $f(P)$ 是这函数序列 $f_n(P)$ 的極限函数，并且函数 $f(P)$ 并不屬于一个具有有穷序数的类，那末我們說这函数 $f(P)$ 屬于具有超穷序数 ω 的类。凡这类的函数也是 B 函数。再进一步可以定义具有超穷序数 $\omega+1$ 的类，余类推。由上述方法可以得到一切 B 函数。这命題的証明需用关于超穷数的补充說明，我們不予詳述。

可以証明，凡在 B 可測集合 $\mathscr{E}$ 上可測的函数 $f(P)$ 必在这集合上与某一 B 函数 $\varphi(P)$ 相抵。

§3. 勒貝格积分

49. 有界函数的积分 現在論有界函数积分的平常定义，但这时基本集合的分割法乃是分成种种可能的可測集合，并将証明

凡可測有界函数是可积分的。令 $\mathscr{E}$ 是可測集合，它的测度是有穷数，在其上定义一个有界的点函数 $f(P)$，就是說在 $\mathscr{E}$ 上，$|f(P)|\leqslant L$，其中 L 是某一正数。把 $\mathscr{E}$ 分成有穷多个互无公点的可测部分集合 $\mathscr{E}_k$：

$$\mathscr{E}=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{E}_k。\tag{1}$$

令 m_k 及 M_k 是 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}_k$ 上諸值的下确界与上确界。作平常的和

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n}m_kG(\mathscr{E}_k);\quad S_\delta=\sum_{k=1}^{n}M_kG(\mathscr{E}_k),\tag{2}$$

其中 δ 表示集合 $\mathscr{E}$ 的分割（1）。和 s_δ 与 S_δ 对于一切分割是有界的，就是說，$|s_\delta|$ 及 $|S_\delta|\leqslant L\cdot G(\mathscr{E})$。令 i 表示和 s_δ 的上确界，I 表示和 S_δ 的下确界，这里确界是就 $\mathscr{E}$ 分成有穷多个可測集合的一切可能分割法而取的。

定义　如果 $i=I$，我們說 $f(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上依 $G(\mathscr{E})$ 可积分的，而說积分的数值等于 i：

$$i=\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E})。$$

如此定义的积分叫做勒貝格-斯提勒杰斯积分。如果 δ 是分割（1），而 δ' 是某另一个分割：

$$\mathscr{E}=\sum_{k=1}^{n'}\mathscr{E}'_k,\tag{3}$$

那末两分割的积 $\delta\delta'$ 是指由一切部分集合 $\mathscr{E}_k\mathscr{E}'_l$ 所組成的分割。这些部分集合显然互无公点。其中可能有几个是空的。分割（3）叫做分割（1）的后繼，是指凡集合 $\mathscr{E}'_l$ 是某一个 $\mathscr{E}_k$ 的部分。

除掉（2）中諸和外，也与論斯提勒杰斯积分时一样，作和

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n}f(P_k)G(\mathscr{E}_k),\tag{4}$$

其中 P_k 表 $\mathscr{E}_k$ 中某一点。凡在[3]中論及 s_δ，S_δ，σ_δ，i 与 I 的都

依然有效。

現在对于任意一个在 $\mathscr{E}$ 上可测而有界的函数 $f(P)$ 指出一分割的序列，使 $S_\delta - s_\delta \to 0$，而使 σ_δ 有确定的極限。由此可知 $f(P)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 的积分 i 存在，并且 s_δ，S_δ 与 σ_δ 对于这一分割序列收斂于 i[3]。

令有界函数 $f(P)$ 定义于 $\mathscr{E}$ 上，并在 $\mathscr{E}$ 上可測，而 m 与 M 各表 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上諸值的下确界与上确界。把函数值的变化区間 $[m, M]$ 分割成部分区間，使其分割点为 y_k：

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M, \tag{5}$$

而令 η 表示諸差 $y_k - y_{k-1}$ 中的最大者。作分割 δ，把集合分成可測部分集合 $\mathscr{E}_k$，其定义如下：

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}[y_0 \leqslant f(P) \leqslant y_1]; \quad \mathscr{E}_k = \mathscr{E}[y_{k-1} < f(P) \leqslant y_k] \tag{6}$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n)。$$

由集合 $\mathscr{E}_k$ 的这个定义直接可知 $y_{k-1} \leqslant m_k$，而 $M_k \leqslant y_k$，从而

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) \leqslant s_\delta \leqslant S_\delta \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathscr{E}_k), \tag{7}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) \leqslant i \leqslant I \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathscr{E}_k)。 \tag{8}$$

考察上面两端和的差值：

$$\sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathscr{E}_k) - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) G(\mathscr{E}_k)。 \tag{9}$$

注意 $y_k - y_{k-1} \leqslant \eta$，又因为 $G(\mathscr{E})$ 是加法函数，可得

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathscr{E}_k) - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} G(\mathscr{E}_k) \leqslant \eta G(\mathscr{E}), \tag{10}$$

如此当 $\eta \to 0$ 时上面的差值趋向于零。由此，并依（7）及（8）可知 $i = I$，而 $S_\delta - s_\delta \to 0$。分基本集合 $\mathscr{E}$ 成部份集合 $\mathscr{E}_k$ 的分割法（6）

叫做勒貝格分割法。这分割是由可测函数 $f(P)$ 值的区間 $[m,M]$ 的分割(5)所定义的。与分割(6)相应并出现于(7)及(8)两式中的和叫做勒貝格和。由上面所說的可得下面的基本定理。

基本定理 設 $\mathscr{E}$ 是可測集合,它的測度有穷。定义于 $\mathscr{E}$ 上的有界可測函数 $f(P)$ 必在 $\mathscr{E}$ 上可积分,而当无限地細分可測函数 $f(P)$ 的区間 $[m,M]$ 所分成的部分时,无論怎样地选擇諸点 P_k,依勒貝格分割法所作的勒貝格和或和 σ_δ 的極限必等于积分值。

注意,如所知,对于基本定理中所述諸分割的任意后繼分割,和 σ_δ 有相同的極限。由此,积分既然可以做为和 σ_δ 的極限而定义,与平常一样,那末它必保持黎曼及古典的斯提勒杰斯积分的平常性質。下节中再証明这些性質。

上面所作的积分曾叫做勒貝格-斯提勒杰斯积分。在特殊情形下,取 $G(\varDelta)$ 为区間 $\varDelta$ 的面积,則上面所作的积分簡称做勒貝格积分。

以前曾指出,凡只具有有穷多間断点的有界函数都是可測的。令 $f(P)$ 表定义在閉的有穷区間 $\varDelta$ 上的一个这样的函数。我們知道这样的函数在区間 $\varDelta$ 上是依黎曼可积分的。既然是有界的可測函数,它依勒貝格也是可积分的。現在証明它的勒貝格积分与黎曼积分相同。事实上,为了得勒貝格积分,只須取区間 $\varDelta$ 分割成可測集合的分割法序列,使对于这序列和(4)有确定的極限,这極限值即勒貝格积分的值。但既然那函数依黎曼是可积分的,那末分割 $\varDelta$ 成部分区間,并无限地細分这些部分区間时,和(4)也有确定的極限值,而这極限值就是黎曼积分。由此可以看出黎曼积分及勒貝格积分在这情形中相合。

勒貝格曾証明,黎曼积分在区間 $\varDelta$ 上存在的必要且充分的条件乃是:$f(P)$ 是有界的,而它的間断点的集合的勒貝格測度存在,并等于零[比較 10]。以前曾証明,这样的函数是依勒貝格可測

的。与上面完全一样可以証明勒貝格积分与黎曼积分重合。如此，凡在有穷的閉区間上依黎曼（依正常的意义）可积分的函数依勒貝格也必可积分，而勒貝格积分与黎曼积分重合。

50. 积分的性質 現在叙述勒貝格-斯提勒杰斯积分的基本性質。在下面的定理中都設 $\mathscr{E}$ 是测度有穷的可测集合。

1. 如果 c 是常数，那末

$$\int_{\mathscr{E}} cG(d\mathscr{E}) = cG(\mathscr{E}). \tag{11}$$

因为对任意的分割 δ，和 s_δ 与 S_δ 都等于 $cG(\mathscr{E})$，由此可得(11)[3]。

2. 如果 $f_1(P)$ 及 $f_2(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上有界并可测，那末

$$\int_{\mathscr{E}} [f_1(P)+f_2(P)]\,G(d\mathscr{E}) =$$

$$=\int_{\mathscr{E}} f_1(P)G(d\mathscr{E})+\int_{\mathscr{E}} f_2(P)G(d\mathscr{E}). \tag{12}$$

令 δ_n 及 δ_n' 表两分割序列，使对于函数 $f_1(P)$ 所作的 σ_{δ_n} 的極限等于 $f_1(P)$ 的积分，对 $f_2(P)$ 作的 $\sigma_{\delta_n'}$ 的極限等于 $f_2(P)$ 的积分，对于分割 $\delta_n''=\delta_n\delta_n'$，就 $f_1(P)$ 及 $f_2(P)$ 所作的各和 $\sigma_{\delta_n''}$ 的極限各等于相应的积分，而(12)可根据和的極限的定理得出。下面我們将假定函数可测、有界而不特别說明。

3. $$\int_{\mathscr{E}} \sum_{k=1}^{p} c_k f_k(P)G(d\mathscr{E}) = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_{\mathscr{E}} f_k(P)G(d\mathscr{E}). \tag{13}$$

把常数因子从积分号下移出来的可能性是由于这种常数因子可以从和 σ_{δ_n} 中提出。此外，还須应用几次性質 2。

4. 如果 $f(P)\geqslant 0$ 在 $\mathscr{E}$ 上成立，那末

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})\geqslant 0. \tag{14}$$

因为所有和 σ_{δ_n} 是非負的。

5. 如果 $f_1(P) \geqslant f_2(P)$，那末

$$\int_{\mathscr{E}} f_1(P)G(d\mathscr{E}) \geqslant \int_{\mathscr{E}} f_2(P)G(d\mathscr{E})。\qquad (15)$$

只須把 4 应用到差 $f_1(P)-f_2(P)$ 上去，并应用 3 即可。

6. $$\left|\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} |f(P)|G(d\mathscr{E})。\qquad (16)$$

証明时只須就 f 与 $|f|$ 及分割（6），对和 σ_δ 作相似的不等式即可。

7. 如果在 $\mathscr{E}$ 上 $a \leqslant f(P) \leqslant b$，那末

$$aG(\mathscr{E}) \leqslant \int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) \leqslant bG(\mathscr{E})。\qquad (17)$$

这可以直接由 5 及 1 得出。

8. 如果 $|f(P)| \leqslant L$，那末

$$\left|\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})\right| \leqslant LG(\mathscr{E})。\qquad (18)$$

因为由所給条件，$-L \leqslant f(P) \leqslant +L$，而不等式 (18) 不过是性質 7 的推論而已。

9. 如果 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''$，而 $\mathscr{E}'$ 与 $\mathscr{E}''$ 可測并无公点，那末

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}'} f(P)G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}''} f(P)G(d\mathscr{E})。\qquad (19)$$

証明时，只須取集合 $\mathscr{E}'$ 及 $\mathscr{E}''$ 的分割（8），并对这些分割分别作 σ_δ 而取其和。这和一定有确定的極限，而公式(19)証明了。

10. 如果 $\mathscr{E}$ 分割成有穷多或可数无穷多可測集合 $\mathscr{E}_k$，那末

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \sum_k \int_{\mathscr{E}_k} f(P)G(d\mathscr{E})。\qquad (20)$$

如果 $\mathscr{E}$ 分成有穷多項，則結論可以直接由性質 9 得出。考察集合 $\mathscr{E}_k$ 有可数无穷多的情形。令 $|f(P)| \leqslant L$。我們可以写成 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\cdots+\mathscr{E}_n+R_n$，而 $R_n=\mathscr{E}-(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\cdots+\mathscr{E}_n)$ 显然

是集合的零序列，所以 $G(R_n)\to 0$[37]。应用有穷多分割項的相应性質可得

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \sum_{k=1}^{n}\int_{e_k} f(P)G(d\mathscr{E}) + \int_{R_n} f(P)G(d\mathscr{E})。\tag{21}$$

对于最后积分，可得估值

$$\left|\int_{R_n} f(P)G(d\mathscr{E})\right| \leqslant LG(R_n),$$

而由于 $G(R_n)\to 0$，当取極限时 (21) 式变成了 (20)。我們剛証完的性質通常叫做积分的完全加法性。

11．如果序列 e_n 中的各集合都屬于 $\mathscr{E}$，并有性質 $G(e_n)\to 0$，那末

$$\int_{e_n} f(P)G(d\mathscr{E})\to 0。\tag{22}$$

这性質可以由下面不等式得出：

$$\left|\int_{e_n} f(P)G(d\mathscr{E})\right| \leqslant LG(e_n)。$$

这性質通常叫做积分的絕对連續性。

12．如果 $\mathscr{E}$ 是測度为零的集合，就是說如果 $G(\mathscr{E})=0$，那末对于任意一个在 $\mathscr{E}$ 上有界的函数 $f(P)$，

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = 0。$$

依[43]函数 $f(P)$ 是可測的，而对于任意的分割法，和 S_δ 与 s_δ 都等于零。

13．如果 $f(P)$ 与 $g(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上是相抵的，那末

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} g(P)G(d\mathscr{E})。\tag{23}$$

令 A 表 $\mathscr{E}$ 中凡 $f\neq g$ 的一切点所組成的集合。依条件，这集合的測度等于零。在集合 $\mathscr{E}'=\mathscr{E}-A$ 上函数 $f(P)$ 与 $g(P)$ 相等。所以得

$$\int_A f(P)G(d\mathscr{E})=\int_A g(P)G(d\mathscr{E})=0;$$

$$\int_{\mathscr{E}'} f(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}'} g(P)G(d\mathscr{E}),$$

而加两式可得(23)。

14. 如果在 $\mathscr{E}$ 上 $f(P)\geqslant 0$，而

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=0, \tag{24}$$

那末 $f(P)$ 与零相抵。我們只須証明集合 $\mathscr{E}[f>0]$ 的測度等于零。这集合可以表示成和的形式：

$$\mathscr{E}[f>0]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}\left[f>\frac{1}{n}\right],$$

而如果它的測度是正的，那末右边和中至少必有一項的測度是正的。例如設 $B=\mathscr{E}\left[f>\frac{1}{n_0}\right]$ 的測度是正的。把积分分成两項：

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\int_B f(P)G(d\mathscr{E})+\int_{\mathscr{E}-B} f(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{25}$$

由于 $f\geqslant 0$，第二項是非負的。在集合 B 上 $f>\frac{1}{n_0}$，所以第一項 $\geqslant\frac{1}{n_0}G(B)$。如此，既然 $G(B)>0$，公式(25)左边是正的，而与(24)冲突了。

15. 如果 $f_n(P)$ 是 $\mathscr{E}$ 上可測函数的序列，并且一致有界，就是說 $|f_n(P)|\leqslant L$，L 是确定的正数(与 n 无关)，而这序列在 $\mathscr{E}$ 上殆遍趋近于極限函数 $f(P)$，那末

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} f_n(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{26}$$

極限函数 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍滿足不等式 $|f(P)|\leqslant L$。必要时可以換成一个相抵函数，以使上面不等式在 $\mathscr{E}$ 上到处成立。有界的可測函数 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的积分存在。作差 $f(P)-f_n(P)$ 的积分，并引用性質 6，可得

$$\left|\int_{\mathscr{E}}[f(P)-f_n(P)]G(d\mathscr{E})\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})。 \quad (27)$$

設 ε 是預定的正数，而 $\mathscr{E}_n$ 是 $\mathscr{E}$ 中凡满足 $|f(P)-f_n(P)|\geqslant\varepsilon$ 的点的集合。依 [45] 的定理 6，$G(\mathscr{E}_n)\to 0$。在集合 $\mathscr{E}-\mathscr{E}_n$ 上不等式 $|f(P)-f_n(P)|<\varepsilon$ 成立。此外，在 $\mathscr{E}$ 中任意点 P 处

$$|f(P)-f_n(P)|\leqslant|f(P)|+|f_n(P)|\leqslant 2L。$$

在(27)式右边的积分分成两个：

$$\int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}_n}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})+$$

$$+\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}_n}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})。$$

由此，依上面所說的，可得

$$\int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant 2LG(\mathscr{E}_n)+\varepsilon G(\mathscr{E}-\mathscr{E}_n),$$

因此更加有

$$\int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant 2LG(\mathscr{E}_n)+\varepsilon G(\mathscr{E})。$$

由 $G(\mathscr{E}_n)\to 0$ 而知存在一数 N，使 $G(\mathscr{E}_n)\leqslant\varepsilon$ 对所有 $n>N$ 成立。如此則

$$\int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant[2L+G(\mathscr{E})]\varepsilon \text{ 当 } n>N \text{ 时成立。}$$

比較(27)可得

$$\left|\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}}f_n(P)G(d\mathscr{E})\right|\leqslant$$

$$\leqslant[2L+G(\mathscr{E})]\varepsilon \text{ 当 } n>N \text{ 时成立,}$$

而由此，旣然 ε 是任意的，可得(26)。注意在証明(26)时只須假設 $|f_n(P)|\leqslant L$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立。必要时换成相抵函数，可使上面不等式在 $\mathscr{E}$ 上到处成立。上述性質說明只要在令 $f_n(P)$ 依絕对

值与标号 n 无关地有界这一个假設之下，就可以在积分号下取極限值。对于斯提勒杰斯积分有一相似性質，在[11] 已証明了。实際上那个性質只是现在証明的定理的系，因为在連續函数 $f_n(P)$ 及 $f(P)$ 的情形下勒貝格-斯提勒杰斯积分变成斯提勒杰斯积分。

16．如果在集合 $\mathscr{E}$ 上 $m<f(P)<M$，那末函数

$$g(y)=G(\mathscr{E}[m<f(P)\leqslant y])$$

是 y 的增函数，而勒貝格-斯提勒杰斯积分依下式变成斯提勒杰斯积分：

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\int_m^M y\,dg(y)。\tag{28}$$

証明时只須注意勒貝格和(8)在此时正是(28)右边斯提勒杰斯积分的和 s_δ 与 S_δ。

对于勒貝格积分的情形，就是說在 $G(\Delta)$ 是区間面积的情形下，积分通常表示成下面的方式：

$$\iint_{\mathscr{E}} f(x,y)\,dx\,dy。$$

在一維与三維空間的情形中也用相似的方式表示勒貝格积分：

$$\int_{e} f(x)\,dx,\quad \int_{e} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz。$$

51．无界非負函数的积分　現在就 $f(P)$ 是在測度有穷的可測集合 $\mathscr{E}$ 上非負无界的可測函数的情形来定义积分。在这情形下不把 $\mathscr{E}$ 分成有穷多，而分成可数无穷多个可測部分集合 $\mathscr{E}_k$。其余和就有界函数的情形作积分相同。令有分解 $\mathscr{E}_k$：

$$\mathscr{E}=\sum_k \mathscr{E}_k。\tag{29}$$

作与它相应的和 s_δ 与 S_δ：

$$s_\delta=\sum_k m_k G(\mathscr{E}_k);\quad S_\delta=\sum_k M_k G(\mathscr{E}_k)。\tag{30}$$

在这情形中將出現非負項的无穷級数，而数 m_k 与 M_k 可以發散

$(+\infty)$。如果有某項 $G(\mathscr{E}_k)=0$，那末相应項可以算做等于零，即使是第一因子 m_k 与 M_k 是 $+\infty$ 也如此，(30) 中的級数和不因其各項次序之改变而改变[1; 134]。再注意，如果取有穷分割 δ，那末在和 S_δ 中至少有一个 M_k 等于 $+\infty$，因为 $f(P)$ 是无界的。和 s_δ 与 S_δ 也可能取无穷值。这两和与前面討論过的有穷和 s_δ 与 S_δ 有同样性質。与以前一样令 i 表示 s_δ 的上确界，I 表示 S_δ 的下确界。这些数可能發散而成为 $+\infty$。与有界函数的情形一样可以証明 $i=I$。把集合 $\mathscr{E}$ 分割如下：首先取出凡 $\mathscr{E}$ 中滿足 $f(P)=+\infty$ 的点 P 所成的集合 $\mathscr{E}_0$（如果这集合存在），把剩下来的集合依下述方式分割成集合 $\mathscr{E}_k$：把区間 $[0,+\infty)$ 分成部分 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots$，并作集合

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}[y_0\leqslant f\leqslant y_1];\quad \mathscr{E}_k=\mathscr{E}[y_{k-1}<f\leqslant y_k]。\tag{31}$$

显然 $m_k\geqslant y_{k-1}$，$M_k\leqslant y_k$，而

$$(+\infty)G(\mathscr{E}_0)+\sum_{k=1}^{\infty}y_{k-1}G(\mathscr{E}_k)\leqslant s_\delta\leqslant S_\delta\leqslant(+\infty)G(\mathscr{E}_0)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}y_kG(\mathscr{E}_k),\tag{32}$$

从而

$$(+\infty)G(\mathscr{E}_0)+\sum_{k=1}^{\infty}y_{k-1}G(\mathscr{E}_k)\leqslant i\leqslant I\leqslant(+\infty)G(\mathscr{E}_0)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}y_kG(\mathscr{E}_k)。\tag{33}$$

如果 $G(\mathscr{E}_0)>0$，那末显然 $i=I=+\infty$。現在設 $G(\mathscr{E}_0)=0$。如此則不等式(32)与(33)变成下列形式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}y_{k-1}G(\mathscr{E}_k)\leqslant s_\delta\leqslant S_\delta\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}y_kG(\mathscr{E}_k),\tag{34}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}y_{k-1}G(\mathscr{E}_k)\leqslant i\leqslant I\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}y_kG(\mathscr{E}_k)。\tag{34$_1$}$$

設区間 $[0, +\infty)$ 的分割使諸差值 (y_k-y_{k-1}) 有界 $(k=1, 2, \cdots)$。命 η 表示其上确界。注意 $y_k\leqslant y_{k-1}+\eta$，可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathscr{E}_k)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1}G(\mathscr{E}_k)+\eta G(\mathscr{E})。\qquad (35)$$

由此直接可得，如果对于某分割其 η 有穷，而(34_I)右边的和等于 $+\infty$,那末可知左边的和也是 $+\infty$。如此，依(34_i)，$i=I=+\infty$。反之，如果 $I=+\infty$，則依(34_I)，(35) 左边的和是 $+\infty$，并且无論取任意具有有穷 η 的分割都如此，因此 (35) 右边的和也等于 $+\infty$，而依(34_i) $i=+\infty$。由此，依(34)，如果对于某一具有有穷 η 的分割和 S_δ 等于 $+\infty$，那末 s_δ 等于 $+\infty$，而此时 s_δ 与 S_δ 对于任意具有有穷 η 的分割都等于 $+\infty$。在这情形下 $i=I=+\infty$。在和有穷的情形中，与在[49]中一样，

$$0\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} y_k G(\mathscr{E}_k)-\sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1}G(\mathscr{E}_k)\leqslant\eta G(\mathscr{E}),$$

而当 $\eta\to 0$ 时上面的差趋向于零，由此可得 $i=I$。从而当 $\eta\to 0$ 时两勒貝格和(34)及 s_δ 与 S_δ 都趋向于积分值。而对于从 $\mathscr{E}_k$ 中任意擇出的 P_k 点，和

$$\sigma_k=\sum_{k=1}^{\infty} f(P_k)G(\mathscr{E}_k)\qquad (36)$$

也趋于同一極限值。在 $i=I=+\infty$ 的情形中和 (36) 显然等于 $+\infty$。如果 s_{δ_n} 与 S_{δ_n} 及 σ_{δ_n} 趋向于积分值（在积分有穷的情形），并且 $\delta_n'\geqslant\delta_n$，那末可知 $s_{\delta_n'}$，$S_{\delta_n'}$，$\sigma_{\delta_n'}$ 也趋向于这积分值。

[49]中的基本定理可以毫无改变地适用于无界非負的可测函数的情形。特別重要的情形乃是积分值有穷的情形。在这情形下函数 $f(P)$ 叫做在集合 $\mathscr{E}$ 上可和的。由上面所講的可以直接得知，函数可和的必要条件是集合 $\mathscr{E}_0=\mathscr{E}[f=+\infty]$ 的測度等于零。

再叙述无界非負可测函数的积分的另一定义，这定义与上面

所講的同效。用 $[f(P)]_N$ 表示依下面方式定义的一个有界非負函数：

$$\text{当}\begin{cases} f(P)\leqslant N \text{ 时} \\ f(P)>N \text{ 时}\end{cases}\quad [f(P)]_N=\begin{cases} f(P) \\ N\end{cases}。\tag{37}$$

这函数的可测性可以由公式当 $a<N$ 时 $\mathscr{E}[[f]_N>a]=\mathscr{E}[f>a]$，当 $a\geqslant N$ 时 $\mathscr{E}[[f]_N>a]=\varDelta$ 看出，$\varDelta$ 在这里表示空集合。作积分

$$i_N=\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})。\tag{38}$$

当 N 增加时这积分值增加，而这單調序列的極限値(有穷或无穷)叫做 $f(P)$ 的积分値。現在証明这积分的新定义与前面所講的同效。首先設満足 $f(P)=+\infty$ 的所有点所組成的集合 $\mathscr{E}_0$ 是測度为零的。积分 (38) 的値等于函数 $[f]_N$ 的和 $s_\delta^{(N)}$ 的上限 i_N。这些和都 $\leqslant$ 对 f 作的相应和 s_δ，因此 $i_N\leqslant i$。我們須要証明当 $N\to+\infty$ 时單調变数 i_N 的極限是 i。用归謬法証明。令 $i_N\to i'<i$ (从而 i' 必是有穷的)。我們可以对 $f(P)$ 作和 s_δ，使 $s_\delta>i'$。在这和中只取有穷多項，使所得的有穷和 s_δ' 仍 $>i'$：

$$s_\delta'=\sum_k{}' m_k G(\mathscr{E}_k)>i',\tag{*}$$

这和是有穷的，而包括去掉上述諸項后所余一切項，和号上的撇號表示去掉那些項。如果 $m_k=+\infty$，那末 $f(P)=+\infty$ 在 $\mathscr{E}_k$ 的一切点处都成立，所以 $\mathscr{E}_k\subset\mathscr{E}_0$，因此 $G(\mathscr{E}_k)=0$，因为依所設 $G(\mathscr{E}_0)=0$。依以前所說，上述和中与这相应的項等于零，所以可以不必写出它来。如此，可以設在和 (*) 的一切項中 m_k 都是有穷的。对 $[f]_N$ 作相类的和：

$$s_\delta'^{(N)}=\sum_k{}' m_k^{(N)} G(\mathscr{E}_k),\quad (m_k^{(N)}=\inf[f]_N,\ \text{在 } \mathscr{E}_k \text{ 上})。$$

如果数 N 大于一切出現于 (*) 中的数 m_k (这些数是有穷的)，那末 $m_k^{(N)}=m_k$，$s_\delta'^{(N)}=s_\delta'>i'$。于是对于 $[f]_N$ 所作的整个和 $s_\delta^{(N)}$

更大于 i'，所以 $i_N=\sup s_\delta^{(N)}>i'$，但这与 i_N 增大而趋向于 i' 相冲突。如此 $i_N\to i$，而第二定义中的积分值与第一定义中者相等。

如果 $G(E_0)>0$，那末在第一定义中积分值等于 $+\infty$。現在証明在第二定义中积分也等于 $+\infty$。注意函数 $[f]_N$ 是非負的，可知

$$i_N=\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})\geqslant\int_{\mathscr{E}_0}[f]_N G(d\mathscr{E})=NG(\mathscr{E}_0),$$

因为依定义 $[f]_N=N$ 在 $\mathscr{E}_0$ 的一切点处成立。由不等式 $i_N\geqslant NG(\mathscr{E}_0)$ 直接可得当 $N\to+\infty$ 时 $i_N\to+\infty$，这正是要証的。

52. 积分的性質 利用和 σ_δ 可以証明非負无界函数的积分的几个性質，与在 [50] 中所做的完全一样。此外，在証明这些性質时也可以用积分的第二个定义。还要注意，如果 $f(P)$ 是有界非負函数，那末 $[f(P)]_N$ 对于足够大的 N 值与 $f(P)$ 相等，从而积分的新定义与 [49] 中的完全相合。

現在証明积分的性質。与在 [50] 中一样，我們設 $\mathscr{E}$ 是測度有穷的可測集合。

1. 如果 $f_k(P)\,(k=1,2,\cdots,m)$ 是可和函数，那末它們以常数为系数的綫性組合仍是可和函数，并且公式(13)成立。

証明与 [50] 中完全一样。

2. 如果在 $\mathscr{E}$ 上 $f(P)$ 可和，那末在集合 $\mathscr{E}$ 的任意可測部分 $\mathscr{E}'$ 上它仍是可和的。

由于非負性与 [50] 中的性質 9，对于 $[f(P)]_N$ 可得

$$\int_{\mathscr{E}'}[f(P)]_N G(d\mathscr{E})\leqslant\int_{\mathscr{E}}[f(P)]_N G(d\mathscr{E})。$$

取極限值可得

$$\int_{\mathscr{E}'}f(P)G(d\mathscr{E})\leqslant\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E}),\tag{39}$$

而如果右边有穷，左边也必有穷，这正是所要証的。

3. 如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，而集合 $\mathscr{E}$ 分割成有穷多或可数无穷多可測集合，那末公式(20)成立。

現在考察集合 $\mathscr{E}_k$ 共有可数无穷多个的情形。对于有界函数 $[f]_N$，可知

$$\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}_k}[f]_N G(d\mathscr{E}), \tag{40}$$

由此可得

$$\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E}). \tag{41}$$

无限地增大 N 可得

$$\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E}). \tag{42}$$

再証明相反的不等式。既然 $f(P)$ 是非負的，依(40)对于任意有穷的 m 可写成

$$\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})\geqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathscr{E}_k}[f]_N G(d\mathscr{E}).$$

无限地增大 N，得極限：

$$\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E})\geqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E}).$$

再无限地增大 m 可得不等式

$$\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E})\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E}),$$

这正好是和(42)相反的不等式。因此(20)成立。

4. 如果 $\mathscr{E}$ 分解成有穷多或可数无穷多个可測集合 $\mathscr{E}_k$，函数 $f(P)$ 在每个 $\mathscr{E}_k$ 上可和，而由非負項所做的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E}) \tag{43}$$

有有穷和(收斂)，那末 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，并且公式(20)成立。

对于函数 $[f]_N$ 与上面一样可得公式(40)及不等式(41)，而后者的右边是有穷数。由这不等式直接可知积分(38)的極限有穷，

也就是說 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和。由此公式(20)可以由上一性質直接得出。

5. 如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，而序列 e_n 中各集合 e_n 都屬于 $\mathscr{E}$，并且满足 $G(e_n)\to 0$，那末公式(22)成立。

令 ε 表示預定的正数。可以固定 N，使

$$\int_{\mathscr{E}}[f-[f]_N]G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon \quad (f\geqslant[f]_N)。$$

如此，依(39)，对于任意 n，可得

$$\int_{e_n}[f-[f]_N]G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon，就是說\int_{e_n}fG(d\mathscr{E})\leqslant$$

$$\leqslant\int_{e_n}[f]_N G(d\mathscr{E})+\varepsilon。\qquad (44)$$

但对于足够大的 n，依[50]中的性質 11，可知

$$\int_{e_n}[f]_N G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon,$$

而不等式(44)变成不等式

$$\int_{e_n}fG(d\mathscr{E})\leqslant 2\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，直接可得公式(22)。最后两性質說明无界非負函数的积分也与有界函数的积分一样具有完全加法性与絕对連續性。

6. 如果 $\mathscr{E}$ 是測度为零的集合，那末 $f(P)$ 的积分等于零。

証明与[50]中一样。

7. 在 $\mathscr{E}$ 上相抵的函数在 $\mathscr{E}$ 上的积分必相等。

8. 如果 $f(P)$ 的积分等于零，这函数必与零相抵。

9. 如果 $f_2(P)\leqslant f_1(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上成立，而 $f_1(P)$ 可和，那末 $f_2(P)$ 也可和，而下面不等式成立：

$$\int_{\mathscr{E}}f_2(P)G(d\mathscr{E})\leqslant\int_{\mathscr{E}}f_1(P)G(d\mathscr{E})。\qquad (45)$$

在上式中可把 f_1 与 f_2 各换成 $[f_1]_N$ 及 $[f_2]_N$，而不等式仍成立。令 $N\to+\infty$ 并取極限值，可得(45)。如果右边有穷，即左边也必有穷。

7，8，9 的証明与 [50] 中的完全一样。現在轉而論可以改変符号的无界函数的勒贝格-斯提勒杰斯积分的定义。对于負(非正)函数，定义积分的方法与上面完全一样。

53. 任意符号的函数 設 $\mathscr{E}$ 是測度有穷的可測集合，在它上面定义了一个可测实函数 $f(P)$，这函数可能取具有两种符号的值。定义函数 $f(P)$ 的正負部分如下：

$$\begin{aligned}&\text{如果}\begin{cases}f(P)\geqslant 0,\\ f(P)<0,\end{cases}\quad \text{则}\quad f^+(P)=\begin{cases}f(P),\\ 0,\end{cases}\\ &\text{如果}\begin{cases}f(P)\leqslant 0,\\ f(P)>0\end{cases}\quad \text{则}\quad f^-(P)=\begin{cases}-f(P),\\ 0.\end{cases}\end{aligned}\tag{46}$$

这定义也可以写成下面形式：

$$f^+(P)=\frac{1}{2}[|f(P)|+f(P)];$$

$$f^-(P)=\frac{1}{2}[|f(P)|-f(P)]。\tag{46$_1$}$$

函数 $f(P)$ 可以表示成这两个非負函数之差：

$$f(P)=f^+(P)-f^-(P)。$$

定义 函数 $f(P)$ 叫做在 $\mathscr{E}$ 上可和的，是指 $f^+(P)$ 及 $f^-(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和。此时函数 $f(P)$ 的积分值由下列公式定义：

$$\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}f^+(P)G(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}}f^-(P)G(d\mathscr{E})。\tag{47}$$

注意，如果两函数 $f^+(P)$ 及 $f^-(P)$ 中只有一个是可和的，那末由上面公式 $f(P)$ 的积分可得确定，但其值是无穷的。例如，設 $f^+(P)$ 是可和的，而 $f^-(P)$ 不是，則 $f(P)$ 的积分值等于 $-\infty$。

定理 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和的必要且充分的条件乃是非負函数

$|f(P)|$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和。

如果 $f(P)$ 可和，那末 $f^+(P)$ 及 $f^-(P)$ 也可和，所以其和 $f^+(P)+f^-(P)=|f(P)|$ 也可和。反之，如果 $f^+(P)+f^-(P)$ 可和，那末由于[52]的性質 9，其中每項也必可和，因此 $f(P)$ 也可和。注意对于有界函数也可分解它成为正負部分，而其积分間的关系也可以表示成公式(47)。以后所謂可和函数也用来包括有界的可測函数。現在轉而論符号任意的可和函数的积分的基本性質。这些性質几乎直接可以由非負函数 $f^+(P)$ 及 $f^-(P)$ 的积分性質看出来。

1. 如果 $f_k(P)(k=1, 2, \cdots, p)$ 是可和函数，那末由它們用常数系数所作的綫性組合式仍是可和函数，并且公式(13)成立。

綫性組合式的可和性可以由不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{p} c_k f_k(P)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |c_k|\,|f_k(P)|$$

看出，只須引用上述定理及[52]中的性質 1 就够了。为了証明公式(13)，分別考察用常数乘函数及取两函数之和两情形，令 $f(P)$ 是可和函数，c 是常数。我們要証明公式

$$\int_{\mathscr{E}} cf(P)G(d\mathscr{E})=c\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。$$

为了确定起見，可設 c 是負数。如此則 $(cf)^+=-cf^-$，而 $(cf)^-=-cf^+$。由(47)的定义可知

$$\int_{\mathscr{E}} cfG(d\mathscr{E})=-c\int_{\mathscr{E}} f^-G(d\mathscr{E})+c\int_{\mathscr{E}} f^+G(d\mathscr{E})=c\int_{\mathscr{E}} fG(d\mathscr{E}),$$

而公式(13)得証。現在設 $f_1(P)$ 与 $f_2(P)$ 是可和函数。要証明

$$\int_{\mathscr{E}} (f_1+f_2)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f_1G(d\mathscr{E})+\int_{\mathscr{E}} f_2G(d\mathscr{E})。\qquad (48)$$

分解諸函数 $f_1, f_2, f=f_1+f_2$ 为正負部分：

$$f_1=f_1^+-f_1^-；\ f_2=f_2^+-f_2^-；\ f=f^+-f^-。$$

那末 $$f_1^+ + f_2^+ + f^- = f_1^- + f_2^- + f^+。$$

凡上式中的函数都是非负的，可和的。应用[52]中的性質1可得

$$\int_{\mathscr{E}} f_1^+ G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}} f_2^+ G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}} f^- G(d\mathscr{E}) =$$
$$= \int_{\mathscr{E}} f_1^- G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}} f_2^- G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}} f^+ G(d\mathscr{E}),$$

由此

$$\int_{\mathscr{E}} f^+ G(d\mathscr{E}) - \int_{\mathscr{E}} f^- G(d\mathscr{E}) =$$
$$= \int_{\mathscr{E}} f_1^+ G(d\mathscr{E}) - \int_{\mathscr{E}} f_1^- G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}} f_2^+ G(d\mathscr{E}) - \int_{\mathscr{E}} f_2^- G(d\mathscr{E}),$$

这正是公式(48)。

2. 如果 $f_1(P)$ 及 $f_2(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上可和的，并且 $f_1(P) \geqslant f_2(P)$，那末公式(15)成立。

依性質1函数 $f_1(P) - f_2(P)$ 是非負的，可和的，而其积分(非負的)等于 $f_1(P)$ 与 $f_2(P)$ 各积分之差，于是得(15)。

3. 如果 $f(P)$ 可和，那末公式(16)成立。

不等式(16)与下面不等式是同效的：

$$\left|\int_{\mathscr{E}} [f^+(P) - f^-(P)] G(d\mathscr{E})\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} [f^+(P) + f^-(P)] G(d\mathscr{E})。$$

4. 如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，那末它在集合 $\mathscr{E}$ 的任意可測部分 $\mathscr{E}'$ 上也可和。

5. 如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，而集合 $\mathscr{E}$ 分割成有穷多或可数无穷多可測集合 $\mathscr{E}_k$，那末公式(20)成立。

上述两性質可以由对于 $f^+(P)$ 及 $f^-(P)$ 的相似性質得出。

6. 如果 $\mathscr{E}$ 分解成有穷多或可数无穷多可測集合 $\mathscr{E}_k$，而函数 $f(P)$ 在每个 $\mathscr{E}_k$ 上可和，并且級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathscr{E}_k} |f(P)| G(d\mathscr{E}) \tag{49}$$

收斂，那末$f(P)$在$\mathscr{E}$上可和，而公式(20)成立。

非負函数$|f(P)|$在一切$\mathscr{E}_k$上可和，而級数(49)既然收斂，依[52]中的性質4，$|f(P)|$在$\mathscr{E}$上可和，所以$f(P)$在$\mathscr{E}$上可和。如此則公式(20)可以直接由上述性質5得出。注意由級数(43)的收斂并不足以断定$f(P)$的可和性。

7. 如果$f(P)$在$\mathscr{E}$上可和，而集合序列e_n中各集合屬于$\mathscr{E}$，并滿足性質$G(e_n)\to 0$，那末公式(22)成立。

这性質由[52]中$f^+(P)$与$f^-(P)$的性質6直接可以得出。如此我們証明了任意可和函数积分的完全加法性及絕对連續性。

8. 如果$\mathscr{E}$是測度为零的集合，那末任意函数$f(P)$在$\mathscr{E}$上的积分等于零。

9. 在$\mathscr{E}$上相抵的函数在$\mathscr{E}$上的积分必相等。

这两性質都可以由$f^+(P)$及$f^-(P)$的相类性質直接得出；只須注意相抵函数的正負部分也各个相抵。

10. 如果$f(P)$在$\mathscr{E}$上可測，$F(P)$在$\mathscr{E}$上可測，非負，并可和，并且$|f(P)|\leqslant F(P)$，那末$f(P)$也可和，而下面公式成立：

$$\left|\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})\right|\leqslant\int_{\mathscr{E}} F(P)G(d\mathscr{E})。\qquad (50)$$

依[52]中的性質9可以証明，$|f(P)|$可和，所以$f(P)$也可和。不等式(50)可以直接由[52]中的性質3及9得出。由上面所証的直接可知，可和函数与有界的可測函数之积仍是可和函数。

再注意积分的两个性質，我們在下面将要用到。

11. 如$f(P)$在有穷区間Δ_0上可和，并且它在屬于Δ_0的任意区間Δ上的积分等于零，那末$f(P)$在Δ_0上与零相抵。

用归謬法証明 如果$f(P)$不与零相抵，那末必存在一正数a，使两集合$\Delta_0[f(P)\geqslant a]$及$\Delta_0[f(P)\leqslant -a]$中至少有一个有大于零的測度。令第一个的測度大于零，并用$\mathscr{E}$表之。則

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = aG(\mathscr{E}) > 0_{\circ}$$

但存在集合 e_1 及 e_2，其测度任意小，并且 $\mathscr{E}+e_1=R+e_2$，而 R 是初等圖形，就是說 R 是有穷多个互无公点的区間之和。依条件，$f(P)$ 在 R 上的积分等于零，所以可写成

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{e_2} f(P)G(d\mathscr{E}) - \int_{e_1} f(P)G(d\mathscr{E})_{\circ}$$

依积分的絕对連續性，右边的絕对值可以弄成任意小，而左边却是确定的正数。于是得出矛盾，可知定理正确。

12. 如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，并且对任意在 $\mathscr{E}$ 上可测并有界的函数 $\varphi(P)$ 满足条件：

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(P)f(P)G(d\mathscr{E}) = 0, \tag{51}$$

那末 $f(P)$ 必与零相抵。如果条件(51)对任意在 $\mathscr{E}$ 上可测有界并满足

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(P)G(d\mathscr{E}) = 0 \tag{52}$$

的 $\varphi(P)$ 成立，那末 $f(P)$ 与一常数相抵。

設 $\mathscr{E}'$ 是 $\mathscr{E}$ 中凡满足 $f(P)\geqslant 0$ 的点所成的集合。令 $\varphi(P)$ 在 $\mathscr{E}'$ 上等于1，在 $\mathscr{E}-\mathscr{E}'$ 上等于零。由条件(51)可知 $f^+(P)$ 在 $\mathscr{E}'$ 上的积分等于零，而由此，依[52]中的性質8可知 $f^+(P)$ 与零相抵。同样可証 $f^-(P)$ 与零相抵，因此 $f(P)$ 与零相抵。

現在証明上面命題的第二部分。用 $kG(\mathscr{E})$ 表示 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的积分值。依(52)，函数 $f(P)-k$ 也满足条件(51)，就是說

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(P)[f(P)-k]G(d\mathscr{E}) = 0_{\circ}$$

此外，依 k 的定义，对于任意常数 c，总有

$$\int_{\mathscr{E}} c[f(P)-k]G(d\mathscr{E}) = 0_{\circ} \tag{53}$$

設 $\psi(P)$ 是 $\mathscr{E}$ 上任意的可测有界函数，而 $cG(\mathscr{E})$ 是它的积分值。函数 $\varphi(P)=\psi(P)-c$ 满足条件(52)，因而

$$\int_{\mathscr{E}}[\psi(P)-c][f(P)-k]G(d\mathscr{E})=0$$

或依(53)：

$$\int_{\mathscr{E}}\psi(P)[f(P)-k]G(d\mathscr{E})=0,$$

由此，依上面已証得的，可知 $f(P)-k$ 与零相抵，从而 $f(P)$ 与 k 相抵。

在本节之末，考察一下一个变数的勒貝格-斯提勒杰斯积分。令 $g(x)$ 是非負函数，取做测度的基础，而 $f(x)$ 依 $g(x)$ 可测，并在 X 軸的可测集合 $\mathscr{E}$ 上或区間 $[a, b]$ ($[a, b]$ 也可以換成区間 $(a, b]$) 上可和。相应积分可以写成

$$\int_{\mathscr{E}}f(x)dg(x) \text{ 或 } \int_{[a,b]}f(x)dg(x) \text{ 或 } \int_{(a,b]}f(x)dg(x), \text{等。}$$

如果 $g(x)=x$，那末就得勒貝格积分。在这情形下任意一点的测度是零，而区間端点是否算在內并无关紧要，在区間上所取的积分平常表示成

$$\int_a^b f(x)dx。$$

此时設 $a<b$。此外，采取下列規定：

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx。$$

54. 复数值的可和函数 不难对取复数值的函数 $f(P)$ 定义可和函数及积分。把这函数分解成实数及虛数两部分：

$$f(P)=f_1(P)+if_2(P)。$$

函数 $f(P)$ 叫做可和的，是指 $f_1(P)$ 与 $f_2(P)$ 可和，而 $f(P)$ 的积分在这情形下由下列公式定义：

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f_1(P)G(d\mathscr{E})+i\int_{\mathscr{E}} f_2(P)G(d\mathscr{E})。\qquad (54)$$

在这情形，上面証明过的定理成立：$f(P)$ 可和的必要且充分的条件是它的絕对値函数 $|f(P)|$ 是可和的。

首先注意，依 $f_1(P)$ 及 $f_2(P)$ 的可测性可知两函数平方的和也是可测的，因此这和的算术平方根也是可测的：$|f|=\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ 是可测的，因为

$$\mathscr{E}[\sqrt{f_1^2+f_2^2}>a]=\mathscr{E}[f_1^2+f_2^2>a^2]。$$

又由不等式

$$|f_1|\leqslant\sqrt{f_1^2+f_2^2};\ |f_2|\leqslant\sqrt{f_1^2+f_2^2};\ \sqrt{f_1^2+f_2^2}\leqslant|f_1|+|f_2|$$

及[52]的性質 9 及 1 直接可知 $|f_1|$ 与 $|f_2|$ 的可和性与 $|f|$ 的可和性同效，由此可得上面所述的結論。

上面所述的性質 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 也都成立，但在作綫性組合式时可以用复数做系数。现在只証明性質 3：

$$\left|\int_{\mathscr{E}} fG(d\mathscr{E})\right|\leqslant\int_{\mathscr{E}}|f|G(d\mathscr{E})。\qquad (55)$$

函数 f_1, f_2 及 $\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ 是可和的，因此对于这三函数各存在一勒貝格分割序列 $\delta_n^{(1)}$, $\delta_n^{(2)}$, $\delta_n^{(3)}$，使所作的和 $\sigma_{\delta_n^{(1)}}$, $\sigma_{\delta_n^{(2)}}$, $\sigma_{\delta_n^{(3)}}$ 趋向于各該函数的积分。如果取分割序列 $\delta_n=\delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}\delta_n^{(3)}$，則对于函数 f_1, f_2, 及 $\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ 所作的和 σ_{δ_n} 趋向于各相应积分。如果 δ_n 分割法把 $\mathscr{E}$ 分成 $\mathscr{E}_k^{(n)}$，而 $P_k^{(n)}$ 是 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 上的某点，则

$$\left|\sum_k[f_1(P_k^{(n)})+if_2(P_k^{(n)})]G(\mathscr{E}_k^{(n)})\right|\leqslant\sum_k|f_1(P_k^{(n)})+$$

$$+if_2(P_k^{(n)})|G(\mathscr{E}_k^{(n)}),$$

而取其極限可得(55)。

55. 积分号下取極限 现在証明对可和函数在积分号下取極限的几个定理。

定理 1. 如果 $f_n(P)$ 是在测度有穷的集合 $\mathscr{E}$ 上可和函数的

序列，并且对于所有函数 $f_n(P)$ 下列不等式恒成立：

$$|f_n(P)| \leqslant F(P), \tag{56}$$

而 $F(P)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个可和函数，$f_n(P) \to f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立，那末 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} f_n(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{57}$$

由定理的条件可知極限函数在 $\mathscr{E}$ 上殆遍满足不等式

$$|f(P)| \leqslant F(P)。 \tag{56$_1$}$$

必要时换成它的相抵函数可設上面不等式在 $\mathscr{E}$ 上到处成立。依性質 10 [53]，$f_n(P)$ 与 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，因此它們在 $\mathscr{E}$ 上殆遍取有穷值。考察差 $f(P)-f_n(P)$ 的积分，并引用 [53] 的性質 10，可得

$$\left|\int_{\mathscr{E}} [f(P)-f_n(P)]G(d\mathscr{E})\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})。 \tag{58}$$

設 ε 是預定的正数，而 $\mathscr{E}_n = \mathscr{E}[|f(P)-f_n(P)| \geqslant \varepsilon]$。依[45]的定理 6 可知

$$G(\mathscr{E}_n) \to 0, \text{ 而如 } P \in \mathscr{E}-\mathscr{E}_n \text{ 則 } |f(P)-f_n(P)| \leqslant \varepsilon。 \tag{59}$$

此外在 $\mathscr{E}$ 的任意点 P 处

$$|f(P)-f_n(P)| \leqslant |f(P)| + |f_n(P)| \leqslant 2F(P)。 \tag{60}$$

(58)右边的积分可分成两部分：

$$\int_{\mathscr{E}} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E}) =$$

$$= \int_{\mathscr{E}_n} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E}) + \int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}_n} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})。$$

由此，依(59)及(60)可知

$$\int_{\mathscr{E}} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E}) \leqslant 2\int_{\mathscr{E}_n} F(P)G(d\mathscr{E}) + \varepsilon G(\mathscr{E}-\mathscr{E}_n),$$

所以

$$\int_{\mathscr{E}} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E}) < 2\int_{\mathscr{E}_n} F(P)G(d\mathscr{E}) + \varepsilon G(\mathscr{E})。\quad (61)$$

由 $G(\mathscr{E}_n)\to 0$，并由 $F(P)$ 积分的絕对連續性，可知存在一数 N，使

$$\int_{\mathscr{E}_n} F(P)G(d\mathscr{E}) \leqslant \varepsilon \quad 当 n>N 时成立，$$

而依(61)，

$$\int_{\mathscr{E}} |f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E}) \leqslant [2+G(\mathscr{E})]\varepsilon \quad 当 n>N 时成立。$$

比較(58)，得

$$\left|\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) - \int_{\mathscr{E}} f_n(P)G(d\mathscr{E})\right| \leqslant [2+G(\mathscr{E})]\varepsilon,$$

而 ε 既然是任意的，可得(57)。与在[50]証明性質 15 时一样，在本定理中只須設不等式(56)在 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立就够了。

定理 2. 如果 $f_n(P)$ 是在測度有穷的集合 $\mathscr{E}$ 上可和函数的不减序列，那末極限函数 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的积分等于有穷数或 $+\infty$，而公式(57)成立。

可和函数 $f_n(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上是殆遍有穷的，而不减序列 $f_n(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上每点处都有極限，但这極限值可能是 $+\infty$。考察非負函数 $f_n(P)-f_1(P)$ 的不减序列。显然

$$0 \leqslant f_n(P)-f_1(P) \leqslant f(P)-f_1(P)。$$

如果非負函数 $f(P)-f_1(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，那末 $f(P)$ 可和。差 $f(P)-f_1(P)$ 可以起着 $F(P)$ 在定理 1 中的作用，而应用那一定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} [f_n(P)-f_1(P)]G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} [f(P)-f_1(P)]G(d\mathscr{E})。$$

在等式两边各加 $f_1(P)$ 的积分可得(57)。現在設 $f(P)-f_1(P)$ 的积分等于 $+\infty$。既然 $f_1(P)$ 是可和，$f(P)$ 的积分也等于 $+\infty$。再注意，如果某一序列 $\varphi_n(P)$ 殆遍收斂于 $\varphi(P)$，那末对于任意

N，$[\varphi_n(P)]_N \to [\varphi(P)]_N$ 殆遍成立。

为了証明这点，只須注意，如果在某点处 $\varphi_n(P)\to\varphi(P)$，那末在这点处 $[\varphi_n(P)]_N\to[\varphi(P)]_N$，只須分别考察 $\varphi(P)\leqslant N$ 与 $\varphi(P)>N$ 两种情形就可以了。如此非负函数 $[f_n(P)-f_1(P)]_N$ 的不减序列殆遍收斂于 $[f(P)-f_1(P)]_N$。極限函数既然有界，自然是可和的。依上面所証的，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}[f_n(P)-f_1(P)]_N G(d\mathscr{E})=$$

$$=\int_{\mathscr{E}}[f(P)-f_1(P)]_N G(d\mathscr{E})。\tag{62}$$

令 K 是任意預給的正数。既然 $[f(P)-f_1(P)]$ 的积分等于 $+\infty$，可以固定 N，使(62)右边的积分大于 K。如此，依(62)，对于凡足够大的 n：

$$\int_{\mathscr{E}}[f_n(P)-f_1(P)]_N G(d\mathscr{E})>K,$$

从而

$$\int_{\mathscr{E}}[f_n(P)-f_1(P)]G(d\mathscr{E})>K。$$

既然 K 是任意的，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\mathscr{E}}f_n(P)G(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}}f_1(P)G(d\mathscr{E})\right]=+\infty,$$

就是說

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}f_n(P)G(d\mathscr{E})=+\infty;$$

所以当 $f(P)$ 的积分等于 $+\infty$ 时，公式(57)也証明了。

注　对于可和函数的減序列也有相似的定理成立。如此的極限函数的积分可以等于 $-\infty$，但不能等于 $+\infty$。如果 $f_n(P)$ 是減序列，那末令 $\varphi_n=-f_n$，就得一增序列，而負号可以从积分号下提出来。

从已証的定理可以引出一个对以后很重要的推論。

定理 3.　如果函数 $u_k(P)$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $\mathscr{E}$ 上是非負的、

可和的,并且由非負項組成的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}} u_k(P)G(d\mathscr{E}) \tag{63}$$

收斂,那末級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P) \tag{64}$$

在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂,而 $u_k(P)\to 0$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立。

考察在 $\mathscr{E}$ 上非負可和函数的不減序列

$$f_n(P)=\sum_{k=1}^{n} u_k(P),$$

并把上面証明了的定理应用到这序列上。既然級数(63)收斂,当 n 无限地增加时 $f_n(P)$ 的积分有有穷極限。所以在这情形下,由級数(64)表出的極限函数:

$$f(P)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P)$$

在 $\mathscr{E}$ 上可和,因此在 $\mathscr{E}$ 上殆遍有有穷值,就是說級数(64)事实上在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂。但任何收斂級数的一般項收斂于零,就是說在 $\mathscr{E}$ 上殆遍 $u_k(P)\to 0$,而定理完全証明。

定理 4. 如果 $f_n(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上非負可和函数的序列,而这序列在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于極限函数 $f(P)$,并且对于任意 n, $f_n(P)$ 的积分不超过某数 A,就是說

$$\int_{\mathscr{E}} f_n(P)G(d\mathscr{E})\leqslant A,$$

那末 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和,而下面不等式成立:

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})\leqslant A。 \tag{65}$$

不等式

$$\int_{\mathscr{E}} [f_n]_N G(d\mathscr{E})\leqslant\int_{\mathscr{E}} f_n G(d\mathscr{E})\leqslant A \tag{66}$$

成立，依[50]的性質15，其中 L 的作用由 N 担当，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}[f_n]_N G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})。$$

在(66)不等式中令 $n\to\infty$ 而取其極限，得：

$$\int_{\mathscr{E}}[f]_N G(d\mathscr{E})\leqslant A,$$

由此可得，$f(P)$ 有和，而当 $N\to\infty$ 时得(65)。

56. 函数类 L_2 在本节中考察某一类可测函数。这类函数在把上面构成的理論应用于数学及数学物理的不同問題上起着很大的作用。

定义 設 $\mathscr{E}$ 是測度有穷的集合，$\mathscr{E}$ 上的实值函数叫做在 $\mathscr{E}$ 上平方可和的函数，是指它的平方 $f^2(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，就是說

$$\int_{\mathscr{E}}f^2(P)G(d\mathscr{E})<+\infty。$$

在 $\mathscr{E}$ 上平方可和的函数类用記号 L_{2G} 表示。在勒貝格的情形中，就是当 $G(\varDelta)$ 表示区間 $\varDelta$ 的面积时，就表成 L_2。在下面为簡單起見也不用 L_{2G} 而表成 L_2。但必須注意所講的一切都适用于任意选擇的 $G(\varDelta)$。現在証明类 L_2 的一系列性質。

定理1. 如果 $f(P)$ 与 $g(P)\in L_2$，那末 $f(P)$ 与积 $f(P)g(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上都可和。

定理中的結論直接可以从下面不等式

$$|f|\leqslant\frac{1}{2}(1+f^2);\quad |fg|\leqslant\frac{1}{2}(f^2+g^2)$$

及[53]中的性質1及10得出。注意在这里与以后只考察实值函数。

定理2. 如果 $f(P)$ 与 $g(P)\in L_2$，那末 $cf(P)$ 与 $f(P)+g(P)$ 也屬于 L_2。

关系 $cf(P)$ 的結論很显然。对于 $f(P)+g(P)$，可以由公式

$$(f+g)^2=f^2+2fg+g^2$$

及定理 1 及[53]中的性質 1 得出。

定理 3. 如果 f 与 $g\in L_2$，那末下面(布尼亞科夫斯基—舒伐尔兹)不等式成立：

$$\left[\int_{\mathscr{E}} fgG(d\mathscr{E})\right]^2\leqslant\int_{\mathscr{E}} f^2G(d\mathscr{E})\cdot\int_{\mathscr{E}} g^2G(d\mathscr{E})。\tag{67}$$

証明与对于黎曼积分的相似公式完全一样。現在重述一下。首先注意，如果实系数的二次三項式 $au^2+2bu+c$ 中 $a>0$，那末从恒等式

$$au^2+2bu+c=\frac{1}{a}[(au+b)^2+(ac-b^2)]$$

直接可知，如果对于一切实值 u 上面的三項式永远取非負值，那末 $b^2\leqslant ac$。我們可設 f 与 g 不与零相抵，否則不等式(67)不足道，因为它的左边等于零。写出显然的公式

$$\int_{\mathscr{E}}(fu+g)^2G(d\mathscr{E})=u^2\int_{\mathscr{E}} f^2G(d\mathscr{E})+$$

$$+2u\int_{\mathscr{E}} fgG(d\mathscr{E})+\int_{\mathscr{E}} g^2G(d\mathscr{E}),$$

而 u 是某一参数。左边的积分对于任意的实数 u 必有非負值。所以右边的三項式也必是非負的。对于这三項式，$b^2\leqslant ac$，以相应的积分值代替 a, b, c，就得不等式(67)。注意在上面三項式中 a 是正的，因为函数 f 不与零相抵[①]。

系 如果 $f\in L_2$，那末显然 $|f|\in L_2$，而把 $|f|$ 表示成 $|f|=|f|\cdot 1$，于是得下面不等式：

$$\left|\int_{\mathscr{E}} fG(d\mathscr{E})\right|\leqslant\int_{\mathscr{E}}|f|G(d\mathscr{E})\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{E}} f^2G(d\mathscr{E})\cdot G(\mathscr{E})}。\tag{68}$$

定理 4. 如果 f 与 $g\in L_2$，那末下面不等式成立：

① 譯者注：不难看出，在(67)中等式成立的必要且充分的条件乃是 f 及 g 的某綫性組合式与 0 相抵。

$$\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f+g)^2G(d\mathscr{E})}\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})}+\sqrt{\int_{\mathscr{E}}g^2G(d\mathscr{E})}。\tag{69}$$

由不等式(67)得

$$\int_{\mathscr{E}}fgG(d\mathscr{E})\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})}\cdot\sqrt{\int_{\mathscr{E}}g^2G(d\mathscr{E})}。$$

把这不等式两边各乘以 2，并把所得新不等式两侧各加上 f^2 及 g^2 的积分。所得的不等式是

$$\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})+2\int_{\mathscr{E}}fgG(d\mathscr{E})+\int_{\mathscr{E}}g^2G(d\mathscr{E})\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})+2\sqrt{\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})}\cdot\sqrt{\int_{\mathscr{E}}g^2G(d\mathscr{E})}+\int_{\mathscr{E}}g^2G(d\mathscr{E})$$

可以变成下面形式：

$$\int_{\mathscr{E}}(f+g)^2G(d\mathscr{E})\leqslant\left[\sqrt{\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})}+\sqrt{\int_{\mathscr{E}}g^2G(d\mathscr{E})}\right]^2,$$

而这正是所要証的(69)。

再注意，如果 $f(P)\in L_2$，那末由于 $f^2(P)$ 的可和性，函数 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍取有穷值。

57. 依中值收斂 現在介紹在 L_2 类中一个新的收斂概念。

定义 所謂 L_2 中的函数序列 $f_n(P)$ 依中值收斂于 L_2 中的函数 $f(P)$，或簡称在 L_2 中收斂于 $f(P)$，是指

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}[f(P)-f_n(P)]^2G(d\mathscr{E})=0。\tag{70}$$

首先要注意，如果把 $f(P)$ 換成与它相抵的函数 $g(P)$，那末在(70)式中的积分值并不改变，而 $g(P)$ 也是 $f_n(P)$ 依中值收斂的極限。在下面我們将把相抵的函数等同之，就是說把屬于 L_2 而相抵的函数看做是同一函数。現在証明極限的唯一性，就是說証明下列定理：

定理 5. 如果 L_2 中的序列 $f_n(P)$ 在 L_2 中收斂于两个函数 $f(P)$ 与 $g(P)$，則这两函数相抵。

写出显然的公式

$$f-g=(f-f_n)+(f_n-g),$$

并把不等式(69)应用于右边，则

$$\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f-g)^2G(d\mathscr{E})}\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f-f_n)^2G(d\mathscr{E})}+$$
$$+\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(g-f_n)^2G(d\mathscr{E})}。$$

当 $n\to\infty$ 时右边趋近于零，而左边与 n 无关，所以

$$\int_{\mathscr{E}}(f-g)^2G(d\mathscr{E})=0。$$

依[52]中的性質 8 可知 $f-g$ 与零相抵，从而 f 与 g 相抵。剛才証明的定理建立了 $f_n(P)$ 在 L_2 中極限的唯一性，但并非一切函数序列都有依中值收斂的極限。注意如果序列 $f_n(P)$ 在 L_2 中殆遍收斂于 L_2 的函数 $f(P)$，那末并不能由此推知，$f_n(P)$ 依中值收斂于 $f(P)$；而反之，如果 $f_n(P)$ 依中值收斂于 $f(P)$，也不能由此推知 $f_n(P)$ 殆遍收斂于 $f(P)$。但我們可以証明下面的定理，

定理 6. 如果 L_2 中的序列 $f_n(P)$ 依中值收斂于 $f(P)$，那末由这序列可以提取出一个部分序列 $f_{n_k}(P)$，而这部分序列在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于 $f(P)$。

依定理中的条件可以取标号 n_k，使下面不等式成立：

$$\int_{\mathscr{E}}(f-f_{n_k})^2G(d\mathscr{E})\leqslant\frac{1}{2^k}。$$

如此則級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}}(f-f_{n_k})^2G(d\mathscr{E})$$

收斂，而依[55]的定理 3，由此可知 $f_{n_k}(P)\to f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立，于是所要証的得到了。

系 如果 $f_n(P)$ 依中值收斂于 $f(P)$，并在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于 $\varphi(P)$，則 $\varphi(P)$ 与 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上相抵。

如果 $f_n(P)\to\varphi(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上殆遍成立，则 $f_{n_k}(P)\to\varphi(P)$ 殆遍成立。但依上面定理可以提取部分序列 $f_{n_k}(P)$，使殆遍 $f_{n_k}(P)\to f(P)$。所以 $f(P)$ 与 $\varphi(P)$ 相抵。

关于依中值收斂，可以建立必要且充分的条件，与数列極限存在的柯西条件相类似[見 I; 36]。首先介紹新定义。

定义 所謂在 L_2 中的函数序列 $f_n(P)$ 自收斂，是指对于任意預定的正数 ε 必存在一数 N，使

$$\int_{\mathscr{E}}(f_n-f_m)^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon \tag{71}$$

当 n 与 $m>N$ 时成立。

定理 7. 序列 $f_n(P)$ 依中值收斂于 L_2 中某一函数的必要条件乃是它是自收斂序列。

設这序列依中值收斂于某一函数 $f(P)$。把差 $f_n(P)-f_m(P)$ 表示成下面形式：

$$f_n-f_m=(f_n-f)+(f-f_m),$$

并应用不等式(69)：

$$\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f_n-f_m)^2G(d\mathscr{E})}\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f-f_n)^2G(d\mathscr{E})}+$$
$$+\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f-f_m)^2G(d\mathscr{E})}。$$

令 ε 表一預定的正数。既然这序列依中值收斂于 $f(P)$，必有一数 N 存在，使当 n 与 $m>N$ 时上面不等式右边根号下的两积分各 $\leqslant\frac{\varepsilon^2}{4}$。依这不等式直接可得不等式(71)。现在再証明逆定理。

定理 8. 序列 $f_n(P)$ 依中值收斂于某函数的充分条件是这序列自收斂。

設 $f_n(P)$ 自收斂，从而証明它依中值收斂于某函数。它既然是自收斂序列，必存在标号的一个增序列 $n_1<n_2<n_3<\cdots$，使

$$\int_{\mathscr{E}}[f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\frac{1}{2^{2k}}。$$

应用不等式(67)于 $f=|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$ 及 $g=1$ 的情形可得

$$\int_{\mathscr{E}}|f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{E}}[f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)]^2G(d\mathscr{E})}\sqrt{\int_{\mathscr{E}}G(d\mathscr{E})},$$

而依上面不等式，

$$\int_{\mathscr{E}}|f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant\frac{1}{2^k}\sqrt{G(\mathscr{E})}。$$

由此得知下面級数收斂：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}}|f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)|G(d\mathscr{E}),$$

而依[55]的定理 3，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)|$$

在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂。从而級数

$$f_{n_1}(P)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(P)-f_{n_k}(P)]$$

也殆遍收斂，但此级数的前 p 項之和正是 $f_{n_p}(P)$，所以序列

$$f_{n_1}(P),f_{n_2}(P),f_{n_3}(P),\cdots$$

在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于某一函数 $f(P)$，并且后者的值是有穷的。我們証明 $f(P)\in L_2$，并且 $f_n(P)$ 依中值收斂于 $f(P)$。既然序列 $f_n(P)$ 是自收斂的，对于任意預給的正数 ε 存在一个数 N，使当 n_k 及 $n>N$ 时，

$$\int_{\mathscr{E}}[f_{n_k}(P)-f_n(P)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon。$$

使 n_k 无限增加，并引用[55]中定理 4，可得

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-f_n(P)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon\text{ 当 }n>N\text{ 时成立。}\qquad(72)$$

由此可知差$f(P)-f_n(P)\in L_2$。但$f_n(P)$是屬于L_2的。取$f_n(P)$与$f(P)-f_n(P)$之和，依定理2可知$f(P)\in L_2$。不等式(72)說明$f_n(P)$依中值趋向于$f(P)$。由上面两定理可得下面結論：序列$f_n(P)$自收斂乃是这序列依中值收斂于某一函数的必要且充分的条件。

注　依中值的收斂也可以不对其絕对值平方定义，而对其一次冪定义。就是說，如果$f_n(P)$ $(n=1, 2, \cdots)$是在$\mathscr{E}$上可和函数的序列，而存在一个可和函数$f(P)$并滿足

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|G(d\mathscr{E})=0$$

的必要且充分的条件乃是：对于任意預定的正数ε，必存在一数N，使当n与m都$>N$时，

$$\int_{\mathscr{E}}|f_n-f_m|G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon。$$

这結論之証明与前边的相似。

58．希勒柏特函数空間　函数族L_2与我們在[15]中所論的族C一样，也是函数空間。这空間中的元乃是在$\mathscr{E}$上平方可和的实值函数。相抵的函数看做这空間中的同一元。这些元的加法与用实数乘两运算都是确定的，并滿足通常初等代数中的定律。元$f(P)$的范数(矢量之長)乃是依下式定义的非負数：

$$\|f(P)\|=\sqrt{\int_{\mathscr{E}}f^2G(d\mathscr{E})}。\tag{73}$$

收斂性定义做依中值收斂。再介紹两元$f(P)$与$g(P)$的数积。它由下面等式定义：

$$(f, g)=\int_{\mathscr{E}}fgG(d\mathscr{E}),\tag{74}$$

而显然下面公式成立：

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}。\tag{75}$$

两元 f 与 g 間的距离由下面公式定义:

$$\rho(f, g)=\sqrt{\int_{\mathscr{E}}(f-g)^2 G(d\mathscr{E})}=\sqrt{(f-g, f-g)}。 \qquad (76)$$

設有三元 f, g, h。写出等式 $f-h=(f-g)+(g-h)$ 并应用(69)。如此依定义(74)可得所謂三角形法則:

$$\rho(f, h) \leqslant \rho(f, g)+\rho(g, h)。 \qquad (77)$$

所謂空間中的零或零元是指 $\mathscr{E}$ 上恒等于零的函数，或与零相抵的函数。零元的范数等于零，而依 [50] 中的性質 4 任意其他元的范数是正的。距离满足 $\rho(f, g) \geqslant 0$，而其中等式成立的必要且充分的条件乃是 f 与 g 两元相重合，就是說函数 f 与 g 相抵。距离与数积都是对称的;就是說 $\rho(f, g)=\rho(g, f)$，而 $(g, f)=(f, g)$。在这函数空間中元的序列有極限的必要且充分的条件乃是它自收斂,就是說对于任意預定的正数 ε 必存在一数 N，使当 n 与 $m>N$ 时 $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$。这一性質通常叫做空間 L_2 的完备性。

与上述完全一样，也可以作出复函数(54)的函数空間 L_2。如此的函数 $f(P)$ 屬于 L_2，是指 $f_1(P)$ 与 $f_2(P)$ 都屬于 L_2。如此則絕对值平方 $|f(P)|^2$ 是可和函数。定理 1 与 2 依然成立。不等式(67)与(69)改换成

$$\left.\begin{aligned} &\left|\int_{\mathscr{E}} f g G(d\mathscr{E})\right|^2 \leqslant \int_{\mathscr{E}}|f|^2 G(d\mathscr{E}) \cdot \int_{\mathscr{E}}|g|^2 G(d\mathscr{E}), \\ &\sqrt{\int_{\mathscr{E}}|f+g|^2 G(d\mathscr{E})} \leqslant \sqrt{\int_{\mathscr{E}}|f|^2 G(d\mathscr{E})}+\sqrt{\int_{\mathscr{E}}|g|^2 G(d\mathscr{E})}。\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

在定义依中值收斂与自收斂时差平方 $(f-f_n)^2$ 与 $(f_n-f_m)^2$ 必須換成差的絕对值的平方 $|f-f_n|^2$ 及 $|f_n-f_m|^2$。定理 7 与 8 依然有效。而在作函数空間时不但可用实数乘函数还可用复数来乘。元的范数由下面公式定义:

$$\|f\|=\sqrt{\int_{\mathscr{E}}|f|^2 G(d\mathscr{E})}, \qquad (79)$$

而数积由下面公式定义：

$$(f, g)=\int_{\mathscr{E}} f\bar{g}G(d\mathscr{E}), \tag{80}$$

其中 $\bar{a}$ 表示与复数 a 共軛的复数。公式(77)依然成立。两元間的距离由公式(76)定义，只須把 $(f-g)^2$ 换成 $|f-g|^2$，并且距离与在实空間中的性質一样。关于数积，公式 $(g, f)=\overline{(f, g)}$ 成立。上述复函数空間中的性質可以由下一事实直接推出：即 $f_1(P)$ 与 $f_2(P)$ 都屬于实空間 L_2 中。函数空間 L_2 常叫做希勒柏特函数空間。

注意一个特殊情形。設函数 $G(\mathscr{E})$ 与集中于諸点 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的質量相应，而这些質量各等于 1。如此則在这些点取有穷数值的任意函数 $f(P)$ 在任意一个包含这些点的集合 $\mathscr{E}$ 上的勒貝格-斯提勒杰斯积分等于下面的有穷和：

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\sum_{k=1}^{m} f(P_k)。$$

如果把任意函数 $f(P)$ 在 $P_k(k=1, \cdots, m)$ 点所取諸值看做一个 m 維矢量的分量，那末得一 m 維空間 R_m，其理論我們在卷 III 已講过了［見 III；25］。上面定义的和，以数相乘，范数，数积等都与在第三卷中所定义者相符。

59．正交函数組　正交函数組的理論与函数空間 L_2 直接联系。在前一卷已經講过［IV；38，80］。現在加以补充，并引入勒貝格-斯提勒杰斯与勒貝格积分的观念。首先論实函数。

定义　設 $\mathscr{E}$ 是可測集合，其測度有穷。所謂定义于 $\mathscr{E}$ 上并屬于 L_2 的函数

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \cdots \tag{81}$$

組成一規格化正交組，是指下面条件滿足：

$$当\begin{cases} k\neq l 时 \\ k=l 时 \end{cases}\quad \int_{\mathscr{E}} \varphi_k(P)\varphi_l(P)G(d\mathscr{E})=\begin{cases} 0, \\ 1。\end{cases} \tag{82}$$

如果 $f(P)$ 是 L_2 中的函数，可以作它对于組(81)的傅立叶系数如下：

$$a_n=\int_{\mathscr{E}} f(P)\varphi_n(P)G(d\mathscr{E}), \tag{83}$$

而所謂它的傅立叶級数是指

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(P)。 \tag{84}$$

关于这級数的收斂与否我們尚无所知，但可作这級数的部分和：

$$S_n(f)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(P)。 \tag{85}$$

如果在

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(P)]^2G(d\mathscr{E}) \tag{86}$$

式中取諸系数 b_k 各等于傅立叶系数 a_k，則这式取最小值。此时式(86)取得下面的簡單形式：

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-S_n(f)]^2G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f^2(P)G(d\mathscr{E})-\sum_{k=1}^{n} a_k^2, \tag{87}$$

由此可得貝色勒不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\leqslant\int_{\mathscr{E}} f^2(P)G(d\mathscr{E}), \tag{88}$$

而在这不等式左边的級数必收斂。如果(88)式成为等式，那末所得的公式

$$\int_{\mathscr{E}} f^2(P)G(d\mathscr{E})=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \tag{89}$$

叫做封閉性方程。依(87)封閉性方程与下面性質同效：即傅立叶級数的部分和 $S_n(f)$ 依中值收斂于函数 $f(P)$。現在証明下面的基本定理。

定理 1（栗斯-費舍）．如果 c_n 是任意預定的实数列，其平方組成一收斂級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2<+\infty, \tag{90}$$

那末在 L_2 中存在着唯一的函数，这函数相对于組(81)所取的傅立叶系数恰是 c_n，而封閉性方程(89)成立。

作函数

$$S_n(P)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(P)。\tag{91}$$

既然組(81)是正交且規格化的，那末

$$\int_{\mathscr{E}}[S_q(P)-S_p(P)]^2G(d\mathscr{E})=c_{p+1}^2+c_{p+2}^2+\cdots+c_q^2\quad(q>p),$$

而由級数(90)的收斂，上式右边当无限地增大 p 时趋向于零，就是說 L_2 中的函数序列(91)自收斂。所以必存在一个屬于 L_2 的函数 $f(P)$，$S_n(P)$ 依中值收斂于 $f(P)$：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}[f(P)-S_n(P)]^2G(d\mathscr{E})=0。\tag{92}$$

現在証明 c_k 正是这函数的傅立叶系数 a_k。注意(83)及組(81)的規格化正交性，可知

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-S_n(P)]^2G(d\mathscr{E})=$$

$$=\left[\int_{\mathscr{E}}f^2(P)G(d\mathscr{E})-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right]+\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)^2。\tag{93}$$

在右边方括号中的差依貝色勒不等式是非負的。右边的其他項也是非負的。当 $n\to\infty$ 时左边趋向于零，所以右边也必然如此。由此直接可知，每个非負項 $(c_k-a_k)^2$ 必等于零，就是說 $c_k=a_k$，这正是我們所要証的。如此函数(91)正是函数 $f(P)$ 的傅立叶級数的部分和，而依(92)直接可知对于 $f(P)$ 封閉性公式成立。剩下的只是要証明具有所述性質的函数 $f(P)$ 是唯一的。如果除 $f(P)$ 以外还有函数 $g(P)$ 也具有所要求的性質，那么(85)将同时是 $f(P)$ 和 $g(P)$ 的傅立叶級数的部分和。依条件封閉性方程对 $f(P)$ 及 $g(P)$ 都成立，就是說序列 $S_n(P)$ 依中值既收斂于 $f(P)$ 也收斂于 $g(P)$。由于 L_2 中極限的唯一性可知 $f(P)$ 与 $g(P)$ 相

抵，就是說它們在 L_2 中表同一元，而定理証明完了。現在介紹封閉組的定义。

定义 規格化正交組(81)叫做封閉的，是指对于凡屬于 L_2 的函数 $f(P)$，封閉性方程(89)成立。

証明定理 1 时并沒有假設組(81)是封閉的。如果組(81)是封閉的，就无須証明那函数 $f(P)$ 滿足封閉性方程，因为依封閉組的定义此时(89)对于凡屬于 L_2 的函数都成立。因此对于封閉組定理 1 可陈述如下：

定理 1′. 如果組(81)是封閉的，而 c_n 是任意預定的实数序列，并且級数(90)收斂，那末在 L_2 中必存在唯一的函数，使其傅立叶系数恰是 c_n。

除封閉組概念之外，还要引入完备組的概念。

定义 組(81)叫做完备的，是指在 L_2 中除零元以外(即与零相抵者以外)不存在与一切 $\varphi_k(P)$ 正交的函数。

現在証明完备組与封閉組两概念同效。

定理 2. 組(81)是完备組的必要且充分的条件乃是它是封閉組。

証必要性时用归謬証法。設函数組(81)是完备的，而不是封閉的，就是說存在一个屬于 L_2 的函数 $h(P)$，其傅立叶系数是 a_k，而

$$\int_{\mathscr{E}} h^2(P)G(d\mathscr{E}) > \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2。 \tag{94}$$

另一方面，依定理 1，在 L_2 中存在一函数 $f(P)$，其傅立叶系数是 a_k，而封閉性公式(89)对于 f 成立。把这式与(94)比較可得

$$\int_{\mathscr{E}} h^2(P)G(d\mathscr{E}) > \int_{\mathscr{E}} f^2(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{95}$$

但差 $f(P)-h(P)$ 的一切傅立叶系数都等于零，就是說它与一切 $\varphi_k(P)$ 正交，而由于(81)是完备組，这一差必与零相抵，就是說

$h(P)$ 与 $f(P)$ 相抵，但这与(95)相冲突，于是必要性証明了。再証明其充分性。就是說設(81)是封閉組，而証明它是完备組，就是要証明，如果某函数 $f(P)$ 的一切傅立叶系数等于零，那末这函数必与零相抵。既然組(81)是封閉的，函数 $f(P)$ 必满足封閉性方程(89)，而既然 $f(P)$ 的一切傅立叶系数等于零，必然

$$\int_{\mathscr{E}} f^2(P)G(d\mathscr{E})=0,$$

由此，依[52]中的性質 8，可知 $f(P)$ 与零相抵。

注意对于 L_2 中的任意函数組 $\psi_n(P)$，我們可以使用在第四卷中論过的那种正交化法[見 IV；38]。

上面所說的一切可以直接推广到 L_2 中的复函数上来。組(81)的規格化与正交性可以表示成下面等式：

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi_k(P)\overline{\varphi_l(P)}G(d\mathscr{E})=\begin{cases}0 & \text{如果 } k\neq l,\\ 1 & \text{如果 } k=l,\end{cases} \tag{96}$$

而傅立叶系数由下面公式定义：

$$a_n=\int_{\mathscr{E}} f(P)\overline{\varphi_n(P)}G(d\mathscr{E})。 \tag{97}$$

在其他公式中到处要把函数及数的平方换成絕对值的平方。例如，封閉性方程可以写成下列形式：

$$\int_{\mathscr{E}} |f(P)|^2G(d\mathscr{E})=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2。 \tag{98}$$

上面講过的定理仍有效，但須把級数(90)换成由数 $|c_n|^2$ 組成的級数。

現在論所謂广义的封閉性方程。令 a_n 及 b_n 各表函数 $f(P)$ 及 $g(P)$ 的傅立叶系数，而組(81)是封閉的。函数 $f(P)+g(P)$ 的傅立叶系数是 a_n+b_n，而函数 $f(P)+ig(P)$ 的傅立叶系数是 a_n+ib_n。对于它們封閉性方程取得下面的形式：

$$\int_{\mathscr{E}} |f+g|^2G(d\mathscr{E})=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^2;$$

$$\int_{\mathscr{E}} |f+ig|^2 G(d\mathscr{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n+ib_n|^2,$$

就是說

$$\int_{\mathscr{E}} [|f|^2+|g|^2+(\bar{f}g+f\bar{g})]G(d\mathscr{E}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2+|b_n|^2+(\bar{a}_nb_n+a_n\bar{b}_n)];$$

$$\int_{\mathscr{E}} [|f|^2+|g|^2+i(\bar{f}g-f\bar{g})]G(d\mathscr{E}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2+|b_n|^2+i(\bar{a}_nb_n-a_n\bar{b}_n)]。$$

使用关于 f 与 g 的封閉性方程，把第二个等式乘以 i，再把它加到第一个等式上去，可得广义封閉性方程：

$$\int_{\mathscr{E}} f\bar{g}G(d\mathscr{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\bar{b}_n。 \tag{99}$$

在实函数的情形中广义封閉性方程取得下面形式：

$$\int_{\mathscr{E}} fgG(d\mathscr{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n。 \tag{100}$$

由广义封閉性方程直接可知可以把 L_2 中任意函数 $f(P)$ 的傅立叶級数在 $\mathscr{E}$ 上逐項积分，或在 $\mathscr{E}$ 的任意可測部分 $\mathscr{E}'$ 上逐項积分 [II；156]，就是說，如果 $a_k(k=1, 2, \cdots)$ 是 $f(P)$ 的傅立叶系数，那末

$$\int_{\mathscr{E}'} f(P)G(d\mathscr{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\mathscr{E}'} \varphi_k(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{101}$$

再証明空間 L_2 的一性質，而由这性質可知在 L_2 中存在一个封閉的規格化正交組。这性質通常叫做可分性，我們叙述如下：L_2 中存在可数多个元 $\psi_k(P)(k=1, 2, \cdots)$，这些元所組成的集合在 L_2 中到处稠密；就是說，对于 L_2 中的任意元 $f(P)$ 与任意預定的正数 ε 必存在一个屬于上述集合中的元 $\psi_m(P)$，这元滿足 $\|f(P)-\psi_m(P)\|\leqslant\varepsilon$。在下面的一节中，將証明 L_2 的可分性。現在証

明，由可分性可以証明有封閉的規格化正交組存在。应用正交化方法于 $\psi_k(P)$ 上，可得某一規格化正交組 $\varphi_k(P)$ $(k=1, 2, \cdots)$。現在証明它是封閉的。依上面所說的，对于 L_2 中的任意 $f(P)$，与任意預定的正数 ε，必存在一个 $\psi_m(P)$，滿足 $\|f-\psi_m\|<\varepsilon$。但 $\psi_m(P)$ 依正交化方法乃是諸函数 $\varphi_k(P)$ 的某一有穷綫性組合式，就是說 $\psi_m(P)=c_1\varphi_1(P)+c_2\varphi_2(P)+\cdots+c_l\varphi_l(P)$，而如此則

$$\|f-\psi_m\|^2=\int_{\mathscr{E}}[f(P)-\sum_{k=1}^{l}c_k\varphi_k(P)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon^2。$$

如果把 c_k 換成 $f(P)$ 对于組 $\varphi_k(P)$ 的傅立叶級数，那末上面不等式更成立：

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-S_l(f)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon^2,$$

而 $S_l(f)$ 表示函数 $f(P)$ 的傅立叶級数的部分和。既然 ε 是任意的，依这不等式可知組 $\varphi_k(P)$ 是封閉的。

再注意，如果 $G(\mathscr{E})$ 和集中于点 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 处的質量相当，那末封閉組只包含 m 个元。这情形不足注意，因为它可归結到有穷維空間 R_m 去。

60. 空間 l_2 与 L_2 空間同时可以考察无穷序列空間 l_2，这与 L_2 有密切的联系，而且我們将考察复数的情形。所謂 l_2 中的元是指复数的无穷序列 $x(x_1, x_2, \cdots)$，而級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ 是收斂的。元与复数相乘及元与元的加法都定义如常。元 cx 的坐标是 $(cx_1, cx_2, \cdots)$，而如 x 与 y 的坐标各是 x_n 与 y_n，則其和的坐标是 x_n+y_n。后者确实屬于 l_2，因为由 $|x_n|^2$ 及 $|y_n|^2$ 所成的級数既是收斂的，而且 $|x_n+y_n|^2\leqslant 2(|x_n|^2+|y_n|^2)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^2$ 收斂。元 x 的范数由下面公式定义：

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}, \tag{102}$$

而元 x 与 y 的数积由下面公式定义：

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n, \tag{103}$$

右边的級数絕对收斂，因为 $|x_n \bar{y}_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2+|y_n|^2)$。于是。

$$\|x\|^2=(x, x)。 \tag{104}$$

元 x 与 y 間的距离由下面公式定义：

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x-y, x-y)}=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2}。 \tag{105}$$

与不等式(67)及(69)完全相类的有不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2; \tag{106}$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}。 \tag{107}$$

其証法也与不等式(67)与(69)相同。注意不等式(106)可以表示成下列形式：

$$|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2。 \tag{108}$$

关于距离，依(107)可知三角形法則成立。空間中的零元乃是坐标都是零的元。我們說元序列 $x^{(n)}$ 趋向于元 x，是指 $\|x-x^{(n)}\| \to 0$。設 $x_k^{(n)}$ 是 $x^{(n)}$ 的坐标，而 x_k 是 x 的坐标。那末 $x^{(n)}$ 趋向于 x 与下面的关系同效：

$$\|x-x^{(n)}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_k^{(n)}|^2 \to 0 \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时成立。} \tag{109}$$

現在指出空間 L_2 及 l_2 間的关系。取某一封閉的規格化正交組(81)。对 L_2 中的任一函数 $f(P)$ 可以取一复数序列即其傅立叶系数 a_k 与之相应，如此則 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ 收斂。反之，对于凡滿足后一条件之复数序列必有一屬于 L_2 之函数与之相应，这由[59]的定理 1 可知。如此借一封閉的規格化正交組之助，可建立起 L_2 与 l_2

中元的一一对应来。对 L_2 中的任一元有一 l_2 的元与它相应，反之也成立。既然有穷多个函数的綫性組合式 $\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(P)$ 的傅立叶系数正是和中各項函数 $f_k(P)$ 的傅立叶系数的同样綫性組合式，可知上述的一对一对应乃是分配的：即是說，如果 L_2 中的元 $f_k(P)$ 与 l_2 中的元 $x^{(k)}$ 各各相应，那末元 $\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(P)$ 与元 $\sum_{k=1}^{m} c_k x^{(k)}$ 相应。由于广义封閉性方程(99)，可知依上面的对应关系 L_2 与 l_2 中相应元的数积也正好相应。由封閉性方程(98)可知相应元的范数也相应。如此由于上述对应关系空間 L_2 与 l_2 几何上是全等的。它們只是同一抽象空間的不同表現而已。以后我們将研究这抽象空間的性質，以及其中的运算子，并用一組公理来規定这个空間。再注意一下空間 l_2 中自收斂的概念。我們說，元序列 $x^{(n)}$ 在 l_2 中自收斂，是指对于任意預定的正数 ε，必存在一数 N，使当 m 与 $n \geqslant N$ 时 $\|x^{(n)}-x^{(m)}\| \leqslant \varepsilon$。注意上面所說 L_2 及 l_2 間的对应关系及[57]的定理 7 及 8，我們可以作結論：序列 $x^{(n)}$ 在 l_2 中有極限的必要与充分的条件乃是它自收斂。極限只可能有一个。

考察 l_2 中只有有穷多个异于零的坐标的一切元，取其异于零的坐标都是有理复数者，就是說可以表示成 $a+bi$ 的形式，而 a 与 b 是有理实数。把这些元的集合叫做 K。既然有理数的集合是可数的，可知元集合 K 是可数集合。我們証明这集合在 l_2 中到处稠密。令 $x(x_1, x_2, \cdots)$ 是 l_2 中某元，而 $z(c_1, c_2, \cdots, c_n, 0, 0, \cdots)$ 是上述那集合 K 中之元。那末

$$\|x-z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - c_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2。 \tag{110}$$

設 ε 是預定的正数。級数 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ 既然是收斂的，可以固定 $n=n_0$，使

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2。$$

在有穷和
$$\sum_{k=1}^{n_0} |x_k - c_k|^2$$
中，可以取有理数 c_k 足够接近 x_k，使这和 $\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2$。如此則依(110) $\|x-z\|^2 \leqslant \varepsilon^2$，就是說 $\|x-z\| \leqslant \varepsilon$。这証明了上面那可数集合 K 在 l_2 中到处稠密。如此可知空間 l_2 是可分的。这空間中的元

$e_1(1, 0, 0, \cdots)$; $e_2(0, 1, 0, 0, \cdots)$; $e_3(0, 0, 1, 0, \cdots)$; $\cdots$

組成一个封閉的規格化正交組。

61. L_2 中的綫性簇 我們再介紹几个与 L_2 有关的新概念。为簡單起見可設 L_2 中的函数是單变数的且定义于某有穷区間 $[a, b]$ 上，而积分是依勒貝格的意义的。

定义 集合叫做綫性簇，是指它滿足下列条件：如果元 $f_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$ 屬于 L_2，那末它們的任意綫性組合式 $c_1f_1(x)+$ $+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 也屬于 L_2。举几个綫性簇的例。令 M 是在 $[a, b]$ 上有界函数所組成的族，就是說对于 M 中任意函数 $f(x)$，存在一正数 L_f，滿足 $|f(x)| \leqslant L_f$。族 M 显然組成一个綫性簇。同理在 $[a, b]$ 上的連續函数族与多項式族也都組成綫性簇。

定理 1. 連續函数的綫性簇在 L_2 中是到处稠密的。須要証明，对于任意屬于 L_2 中的元 $f(x)$ 与任意預定的正数 ε，必存在 $[a, b]$ 上的一个連續函数 $\varphi(x)$，使

$$\|f-\varphi\|^2 = \int_a^b (f-\varphi)^2 dx \leqslant \varepsilon^2。 \tag{111}$$

我們可以写 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，而 $f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 是 $f(x)$ 的正負部分。函数 $f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 也屬于 L_2，而在 $[a, b]$ 上也是可和的，所以是只取有穷多个数值的片段定值函数 $\omega_n^+(x)$ 及 $\omega_n^-(x)$

序列的極限，而 $0 \leqslant \omega_n^+(x) \leqslant f^+(x) + \frac{1}{2^n}$，$0 \leqslant \omega^-(x) \leqslant f^- + \frac{1}{2^n}$[47]。应用[65]中的定理1，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f^+ - \omega_n^+)^2 dx = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f^- - \omega_n^-)^2 dx = 0。\qquad (112)$$

此外，依不等式 $(x_1+x_2)^2 \leqslant 2(x_1^2+x_2^2)$，可知 $[f-(\omega_n^+-\omega_n^-)]^2 \leqslant$ $\leqslant 2(f^+-\omega_n^+)^2 + 2(f^- - \omega_n^-)^2$，而 $\omega_n = \omega_n^+ - \omega_n^-$ 是只取有穷多个数值的片段定值函数，于是依(112)可以固定 n 的值，使 $\|f-\omega_n\| \leqslant \varepsilon_0$，而 ε_0 是任意預定的正数。因为 $\|f-\varphi\| \leqslant \|f-\omega_n\| + \|\omega_n - \varphi\|$，为了証明(111)只須証明有連續函数 $\varphi(x)$ 存在，使 $\|\omega-\varphi\| \leqslant \varepsilon$，其中 ω 是只取有穷多个值的函数。如此的函数可以表成下列形式[47]：

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \omega_{\mathscr{E}_k}(x),$$

而 $\omega_{\mathscr{E}_k}(x)$ 是 $[a, b]$ 中集合 $\mathscr{E}_k$ 的特征函数。如果 $\varphi_k(x)(k=1, 2, \cdots, m)$ 是某一連續函数，而 $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots +$ $+ c_m\varphi_m(x)$，那末

$$\|\omega-\varphi\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |c_k| \, \|\omega_{\mathscr{E}_k} - \varphi_k\|,$$

所以定理的証明变成下面断語的証明：对于 $[a, b]$ 中的任意可測集合 $\mathscr{E}$ 的特征函数 $\omega_{\mathscr{E}}(x)$，及任意預定的正数 ε，必存在某一連續函数 $\varphi(x)$，使 $\|\omega-\varphi\| \leqslant \varepsilon$。我們知道，存在一个閉集合 F，屬于 $\mathscr{E}$，并且 $m(\mathscr{E}-F) \leqslant \varepsilon_0^2$，而 ε_0 是任意預定的正数[36]。如此

$$\|\omega_{\mathscr{E}} - \omega_F\|^2 = \int_a^b [\omega_{\mathscr{E}}(x) - \omega_F(x)]^2 dx = \int_{\mathscr{E}-F} dx = m(\mathscr{E}-F) \leqslant \varepsilon_0^2,$$

而由于不等式 $\|\omega_{\mathscr{E}} - \varphi\| \leqslant \|\omega_{\mathscr{E}} - \omega_F\| + \|\omega_F - \varphi\|$，所以只須对于閉集合的特征函数而証明上述的結論。用 $r(x)$ 表示点 x 到閉集合 F 的距离，而 F 屬于 $[a, b]$。对于任意 h，可得 $r(x+h) \leqslant r(x) +$ $+ |h|$，而 $r(x)$ 是連續函数。此外，既然 F 是閉的，$r(x)=0$ 的

必要且充分的条件乃是 $x\in F$。不难看出，$\omega_F(x)$ 是連續函数的不增序列的極限：

$$\omega_F(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nr(x)}。$$

为簡單起見，令 $\varphi_n(x)=\frac{1}{1+nr(x)}$。依 [55] 的性質 15，当 $n\to\infty$ 时 $\|\omega_F-\varphi_n\|\to 0$，所以对于任意預定的正数 ε 可求得一 n 值，使 $\|\omega_F-\varphi_n\|<\varepsilon$，而 $\varphi_n(x)$ 是連續函数，于是定理証明了。現在陈述这定理的几个系。

系 1. 如果函数 $\varphi(x)$ 是 $[a, b]$ 上任意的連續函数，那末可以作一多項式 $p(x)$，使在 $[a, b]$ 上 $|\varphi(x)-p(x)|\leqslant\varepsilon_0$，而 ε_0 是任意預定的正数 [II; 154]。如此，

$$\|\varphi-p\|^2=\int_a^b[\varphi(x)-p(x)]^2dx\leqslant\varepsilon_0^2(b-a)。$$

注意 $\|f-p\|\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-p\|$，并且 ε 是任意数，可知多項式的綫性族在区間 $[a, b]$ 上的 L_2 中是到处稠密的。

系 2. 設 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的，而 ε_0 是預定的正数。依 $\varphi(x)$ 的一致連續性，可以把 $[a, b]$ 分成有穷多个区間 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$，并固定数 $a_k(k=1, 2, \cdots, m)$，使 $|\varphi(x)-a_k|\leqslant\varepsilon_0^2$ 当 $x\in\Delta_k$ 时成立。現在在区間 $[a, b]$ 上定义函数 $\pi(x)$ 如下：如果 $x\in\Delta_k$，則 $\pi(x)=a_k$。在区間内的分点处，可以令 $\pi(x)$ 等于与以此点为左端的区間相应的数 a_k。依如此定义的 $\pi(x)$，可知

$$\|\varphi-\pi\|^2=\sum_{k=1}^m\int_{\Delta_k}[\varphi(x)-\pi(x)]^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^m\varepsilon_0^2\int_{\Delta_k}dx=\varepsilon_0^2(b-a), \tag{113}$$

而与在上面的系中一样，可由此得出結論，上述类型的函数 $\pi(x)$ 在 L_2 中到处稠密。这种函数取有穷多值 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，而且在每个区間上各取同一值。

系 3. 既然有理数是到处稠密地分布在数直綫之上，对于任意預定的正数 ε_0，可以将数 a_k 及构成区間 Δ_k 的諸分点都取为有理数，以使不等式(113)能滿足。在 a_k 与构成区間 Δ_k 的分点都是有理数的限制之下，上述那种函数 $\pi(x)$ 也构成 L_2 中的到处稠密集合。但不难看出，这类函数 $\pi(x)$ 共有可数无穷多。事实上，如果 $m=1$，函数 $\pi(x)$ 在 $[a, b]$ 上等于有理数 a_1。如此的函数組成可数集合。当 $m=2$ 时，在 $[a, b]$ 內部取一有理分点，而把 $[a, b]$ 分解成两个区間 Δ_1 与 Δ_2 共有可数无穷多方法。在这两个区間中之每个上，$\pi(x)$ 等于某一有理数，而因可数多个可数集合仍是可数的，所以当 $m=2$ 时，上述那种类型的函数 $\pi(x)$ 构成可数集合。同样也可以証明 $m=3$ 的情形。如此全部 $\pi(x)$ 的集合是可数的，于是証明了，在 L_2 中存在一个到处稠密的可数集合。因此 L_2 是可分的。

为了証明某規格化正交組 $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 是封閉的，只須証明封閉性方程对于某一在 L_2 中到处稠密的函数集合成立，这就是說，下面定理成立：

定理 2. 如果 K 是在 L_2 中到处稠密的一个集合，而封閉性方程对于凡 K 中的函数成立，那末这方程对于凡 L_2 中的函数也成立。

設 $f(P)$ 是 L_2 中某一元，而 ε 是預定的正数。既然 K 在 L_2 中是到处稠密的，可以从 K 中取出一函数 $\varphi(x)$ 来，使 $\|f-\varphi\|\leqslant\varepsilon$。依条件，函数 $\varphi(x)$ 既然屬于 K，必然滿足封閉性方程，从而可以取函数 $\varphi(x)$ 对于組 $\varphi_k(x)$ 的傅立叶級数之一部分和 $s_n(\varphi)$，使 $\|\varphi-s_n(\varphi)\|\leqslant\varepsilon$。

由等式 $f-s_n(f)=(f-\varphi)+(\varphi-s_n(\varphi))+(s_n(\varphi)-s_n(f))$ 与三角形法則可得 $\|f-s_n(f)\|\leqslant 2\varepsilon+\|s_n(\varphi)-s_n(f)\|$。但 φ 与 f 两函数的傅立叶級数的 n 阶部分和之差正是函数 $\varphi-f$ 的傅立叶

級数的 n 阶部分和，就是說，$s_n(\varphi)-s_n(f)=s_n(\varphi-f)$。此外，依貝色勒不等式，$\|s_n(\varphi-f)\|\leq\|\varphi-f\|$，所以 $\|f-s_n(f)\|\leq 2\varepsilon+\|f-\varphi\|\leq 3\varepsilon$，而因为 ε 是任意的，由此可知封閉性方程对于 $f(x)$ 也成立，于是定理証明了。由这定理与前面的系 1 可得結論：在有穷区間的情形，証明封閉性时，只須驗明封閉性方程对于凡多項式成立就够了。

上面所論的一切都容易推广到平面上某一有穷区間上的 L_2 空間。只是在証明系 1 时，必須首先証明下面的別尔恩斯坦定理：卽在任意有穷平面区間之上，任意連續函数 $f(x, y)$ 可以借 x 与 y 的多項式一致地逼近。

62. 封閉組的例 介紹几个在有穷区間 $[a, b]$ 上規格化正交封閉組的簡單例。如果应用正交化法于 x 的非負整冪：$1, x, x^2, \cdots$ 上去 [IV; 38]，可得区間 $[a, b]$ 上的正交多項式 $p_k(x)$ 組 $(k=0, 1, 2, \cdots)$，而 $p_k(x)$ 的次数是 k。凡 n 次多項式 $p(x)$ 可以表示成綫性組合式

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)。\tag{114}$$

为了明了这点，只須定义 c_n，使右边 x^n 的系数与 $p(x)$ 中 x^n 的系数相同。如此再取 c_{n-1}，使 $c_{n-1}p_{n-1}(x)$ 的 x^{n-1} 項系数等于 $p(x)-c_np_n(x)$ 的 x^{n-1} 項系数，如此类推。在公式(114)中系数 c_k 显然就是 $p(x)$ 对于 $p_k(x)$ 的傅立叶系数。由等式(114)可知，在 $p_k(x)$ 为正交組的情形中，封閉性方程对于任意多項式 $p(x)$ 成立，由此可知，依上节中的定理 2，正交多項式組是封閉的。上面已看到，在区間 $[-l, l]$ 上，对于正交組

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\ (n=1, 2, 3, \cdots);\ \cos\frac{n\pi x}{l}\ (n=0, 1, 2, \cdots)\tag{115}$$

封閉性方程对于任意連續函数 [II; 148] 都滿足，由此可知組(115)在 L_2 中也是封閉的。同样在区間 $[0, l]$ 上正交函数組

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\ 与\ \cos\frac{n\pi x}{l}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

是封閉的。

以前我們曾看到 [IV; 99]，在边界值問題中的特征函数 $\varphi_k(x)$ 的情形 $(k=1,\ 2,\ \cdots)$，凡具有連續的二阶导数并满足边界条件的函数依函数 $\varphi_k(x)$ 可以展开成一致收敛的傅立叶級数。对于如此的函数封閉性方程自然成立。改变函数在积分两限極近处小区間內的值，不难証明，即使不要求在端点的边界条件，封閉性方程仍是对于一切具有二阶連續导数的函数都成立。封閉性方程自然对于一切多項式也满足，因此特征函数 $\varphi_k(x)$ 組是封閉的。

63. 赫勒德尔与閔可夫斯基不等式　与类 L_2 同时也常考察絕对值的 p 次冪 $|f(p)|^p$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和的可測函数类 L_p（如果是复值函数，也是一样）。首先对于任意 >1 的指数 p，介紹关于和与积分的与不等式(67)与(69)相似的不等式。

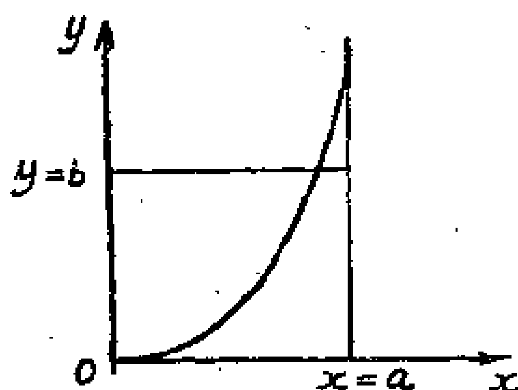


圖 3.

設 α 是某一正数。在平面 XY 上考察曲綫 $y=x^\alpha$，并引与坐标軸平行的直綫 $x=a$ 与 $y=b$（見圖 3）。这两直綫与坐标軸及上面的曲綫包圍两个平面区域，其面积各是

$$S_1=\int_0^a x^\alpha dx=\frac{a^{1+\alpha}}{1+\alpha};\quad S_2=\int_0^b y^{\frac{1}{\alpha}}dy=\frac{b^{1+\frac{1}{\alpha}}}{1+\frac{1}{\alpha}}。$$

这些面积之和不小于具有边長 a 与 b 的矩形的面积 ab，就是說

$$ab\leqslant\frac{a^{1+\alpha}}{1+\alpha}+\frac{b^{1+\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1+\alpha}{\alpha}}。$$

令 $p=1+\alpha$ 及 $p'=1+\frac{1}{\alpha}$，可以把上面不等式变成

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'},\tag{116}$$

而 p 与 p' 两数满足关系

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1。\tag{117}$$

正数 α 既然是任意的，不等式 (116) 对于满足关系 (117) 的任意正数 p 与 p' 都成立。这两数显然都必須大于 1。如果 $p=2$，那末 $p'=2$，而不等式(116)变成显明的不等式 $2ab\leqslant a^2+b^2$。由圖 3 可以看出，公式 (116) 中等号成立的必要且充分的条件乃是 $x=a$ 与 $y=b$ 两直綫交点位于 $y=x^\alpha$ 曲綫上，就是說，$b=a^\alpha$，也就是 $b==a^{p-1}$。設正数 a'_k 与 b'_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 满足关系

$$\sum_{k=1}^{n}a'^{p}_k=1,\quad \sum_{k=1}^{n}b'^{p'}_k=1。\tag{118}$$

在(116)中令 $a=a'_k$，$b=b'_k$。依 k 取和，并注意(117)与(118)，得

$$\sum_{k=1}^{n}a'_kb'_k\leqslant 1。\tag{119}$$

現在考察任意正数 a_k 及 b_k，并令

$$A=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}};\ B=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}。\tag{120}$$

数 $a'_k=a_k:A$ 与 $b'_k=b_k:B$ 显然满足关系 (118)，所以它們满足不等式(119)，而在这情形中可以写成下列形式:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant AB,$$

就是說

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}。\tag{121}$$

取極限值，对于无穷和可得相似的不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}。 \tag{122}$$

而右边的級数假設都是收斂的。如此則左边的級数也收斂。数 a_k 与 b_k 中也可能有几个是零。对于复数，应用不等式

$$\left|\sum_k a_k b_k\right| \leqslant \sum_k |a_k|\,|b_k|,$$

可以把上述不等式写成

$$\left|\sum_k a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_k |a_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_k |b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}。 \tag{123}$$

上边不等式通常叫做赫勒德尔关于和的不等式。当 $p=p'=2$ 时，它变成通常的 [60] 中的不等式 (106)。对于积分也有完全相类的不等式成立。設 $f(P)\in L_p$, $g(P)\in L_{p'}$。依 (116) 可知

$$|f(P)g(P)| \leqslant \frac{|f(P)|^{p}}{p} + \frac{|g(P)|^{p'}}{p'}。$$

右边依条件是可和的。因此积 $f(P)\,g(P)$ 也是可和函数，就是說，如果 $f(P)\in L_p$, $g(P)\in L_{p'}$，那末积 $f(P)g(P)$ 是可和函数（比較 [56] 中的定理 1）。对于这乘积，与 [56] 中 (67) 相类的赫勒德尔不等式成立：

$$\left|\int_{\mathscr{E}} fg\,dx\,dy\right| \leqslant \left(\int_{\mathscr{E}} |f|^{p} dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathscr{E}} |g|^{p'} dx\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{124}$$

而我們只就勒貝格积分写出来。这不等式通常是由不等式 (122) 借取極限值而得出。設 δ'_n 与 δ''_n 是对于 $|f|$ 与 $|g|$ 的无限細分的勒貝格分割序列，而 $\delta_n=\delta'_n\cdot\delta''_n$ 是两分割 δ'_n 与 δ''_n 之积。令 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 是在分割 δ_n 中集合 $\mathscr{E}$ 的部分，而 $m'_{k,n}$ 与 $m''_{k,n}$ 是 $|f|$ 与 $|g|$ 在 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 上所取諸值的上确界。注意 (117) 可知

$$\sum_k m'_{k,n} m''_{k,n}\, m(\mathscr{E}_k^{(n)}) = \sum_k m'_{k,n}\, m^{\frac{1}{p}}(\mathscr{E}_k^{(n)}) \cdot m''_{k,n}\, m^{\frac{1}{p'}}(\mathscr{E}_k^{(n)})。$$

現在把赫勒德尔不等式应用到数 $a_k=m'_{k,n}\, m^{\frac{1}{p}}(\mathscr{E}_k^{(n)})$ 及 $b_k=$ $=m''_{k,n}\, m^{\frac{1}{p'}}(\mathscr{E}_k^{(n)})$ 上去，可得

$$\sum_k m'_{k,n} m''_{k,n} m(\mathscr{E}_k^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_k m'^{p}_{k,n} m(\mathscr{E}_k^{(n)})\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_k m''^{p'}_{k,n} m(\mathscr{E}_k^{(n)})\Big)^{\frac{1}{p'}}。 \qquad (125)$$

用 $m_{k,n}$ 表示积 $|f|\cdot|g|$ 在 $\mathscr{E}_k^{(n)}$ 上所取值的上确界。显然可得不等式 $m_{k,n} \leqslant m'_{k,n} m''_{k,n}$，而由(125)得

$$\sum_k m_{k,n} m(\mathscr{E}_k^{(n)}) \leqslant \Big(\sum_k m'^{p}_{k,n} m(\mathscr{E}_k^{(n)})\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_k m''^{p'}_{k,n} m(\mathscr{E}_k^{(n)})\Big)^{\frac{1}{p'}}。$$

对于勒贝格分割序列取极限值，可得

$$\int_{\mathscr{E}} |f|\,|g|\,dx\,dy \leqslant \Big(\int_{\mathscr{E}} |f|^p dx\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathscr{E}} |g|^{p'} dx\,dy\Big)^{\frac{1}{p'}}, \qquad (126)$$

由此可得(124)。

现在再証明与 [56] 中 (69) 相类的不等式。首先考察和的情形。令 a_k 与 b_k 是两正数序列。把明显的等式

$$(a_k+b_k)^p = (a_k+b_k)^{p-1}a_k + (a_k+b_k)^{p-1}b_k$$

相加，可得

$$\sum_k (a_k+b_k)^p = \sum_k (a_k+b_k)^{p-1}a_k + \sum_k (a_k+b_k)^{p-1}b_k。$$

把赫勒德尔不等式应用到右边的和上去，可得不等式

$$\sum_k (a_k+b_k)^p \leqslant \Big(\sum_k a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_k (a_k+b_k)^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \Big(\sum_k b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_k (a_k+b_k)^{(p-1)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}。$$

但依(117)，$p'=p:(p-1)$，而上面不等式变成

$$\sum_k (a_k+b_k)^p \leqslant \Big(\sum_k (a_k+b_k)^p\Big)^{1-\frac{1}{p}} \Big[\Big(\sum_k a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_k b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]。$$

把上式两边用右边方括号前的因子除，可得闵可夫斯基对于和的不等式：

$$\Big(\sum_k (a_k+b_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_k a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_k b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}。 \qquad (127)$$

由这不等式，并利用 $|f+g| \leqslant |f| + |g|$，与上面一样可得闵可夫

斯基积分不等式：

$$\left(\int_{\mathscr{E}}|f+g|^p dx dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{\mathscr{E}}|f|^p dx dy\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathscr{E}}|g|^p dx dy\right)^{\frac{1}{p}}。 \quad (128)$$

在所得不等式(127)及(128)中，我們假設 $p>1$。当 $p=1$ 时这两式是显然的，但当 $p<1$ 时它們不成立。

应用上面的不等式，很容易証明关于函数族 $L_p(p>1)$ 的一些性質，与以前关于 L_2 所講的一样，并可設函数是复值的。枚举一些这种性質。如果 $f(P)$ 与 $g(P)\in L_p$，而 c 是常数，那末 $cf(P)$ 与 $f(P)+g(P)\in L_p$。我們說序列 $f_n(P)$ 在 L_p 中依中值收斂于 L_p 中的 $f(P)$，是指

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}}|f(P)-f_n(P)|^p m(d\mathscr{E})=0。$$

如果这关系成立，由序列 $f_n(P)$ 可以取出一个在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂于 $f(P)$ 的部分序列。我們說 L_p 中的函数序列 $f_n(P)$ 在 L_p 中自收斂，是指对于任意預定的正数 ε，必存在一个数 N，使当 n 与 $m>N$ 时，

$$\int_{\mathscr{E}}|f_n-f_m|^p m(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon。$$

L_p 中函数序列依中值收斂于 L_p 中某函数的必要且充分的条件乃是这序列在 L_p 中自收斂。注意極限函数的确定可能不是唯一的，但它們相差不过是与零相抵的函数，这点与在 L_2 中同。在 L_p 中可以定义元的范数如下：

$$\|f\|=\left(\int_{\mathscr{E}}|f|^p m(d\mathscr{E})\right)^{\frac{1}{p}},$$

而两元之間的距离定义做

$$\rho(f,g)=\left(\int_{\mathscr{E}}|f-g|^p m(d\mathscr{E})\right)^{\frac{1}{p}},$$

并且三角形法則成立。但在 L_p 中不能与在 L_2 中一样地定义数积。

完全与 l_2 一样，我們也可以考察空間 l_p，其中的元是滿足

$\sum\limits_{p}|x_n|^p<+\infty$ 的复数序列 $(x_1, x_2, \cdots)$。当 $p>1$ 时，可以証明 l_p 与 l_2 有一些相类的性質，与 L_p 及 L_2 間的关系相似。

64. 无穷測度集合上的积分 到此为止我們所考察的乃是在測度有穷的可測集合上的积分。推广到測度无穷的集合上的方法，本質上与定义无穷区間上的黎曼积分一样。設在測度无穷的可測集合 $\mathscr{E}$ 上有一个可測的非負函数 $f(P)$。考察集合的无穷漲序列

$$\mathscr{E}_1\subset\mathscr{E}_2\subset\mathscr{E}_3\subset\cdots, \tag{129}$$

其測度都是有穷的，并且其極限集合是 $\mathscr{E}$。例如可以定义集合 $\mathscr{E}_n$ 为集合 $\mathscr{E}$ 与区間 $\Delta_n(-n\leqslant x\leqslant+n;\ -n\leqslant y\leqslant+n)$ 的交。对于有界集合，下列积分存在：

$$\int_{\mathscr{E}_n} f(P)G(d\mathscr{E}), \tag{130}$$

而由于 $f(P)$ 是非負的，上面序列当 n 增加时是不減的。單調序列(130)的極限叫做 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的积分：

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}_n} f(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{131}$$

注意，积分(130)可能等于 $+\infty$。如此則 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的积分也显然等于 $+\infty$。也可能一切积分(130)都是有穷的，但在 $\mathscr{E}$ 上的积分等于 $+\infty$。为了保証上述积分定义合法，我們必須証明，序列(130)的極限与單調的集合漲序列 $\mathscr{E}_n$ 的选擇无关。

定理 无論怎样选擇以 $\mathscr{E}$ 为極限的測度有穷的可測集合漲序列 $\mathscr{E}_n$，积分(130)总有同一極限值。

用归謬法証明。設除集合序列(129)之外，另有測度有穷的集合漲序列 $\mathscr{E}'_1\subset\mathscr{E}'_2\subset\mathscr{E}'_3\subset\cdots$，其極限集合是 $\mathscr{E}$，并且設对于这两序列 $\mathscr{E}_n$ 及 $\mathscr{E}'_n$，积分序列(130)具有不同的極限值。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}_n} f(P)G(d\mathscr{E})=a, \quad \text{而} \lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}'_n} f(P)G(d\mathscr{E})=b>a。 \tag{132}$$

数 a 在任何情形下是有穷的，而且

$$\int_{\mathscr{E}_n} f(P)G(d\mathscr{E}) \leqslant a \quad (n=1, 2, \cdots)。 \tag{133}$$

首先設数 b 是有穷的。选择正数 $c<b-a$,可以固定正整数值 m,使

$$\int_{\mathscr{E}_m} f(P)G(d\mathscr{E}) > a+c。 \tag{134}$$

既然 $f(P)$ 是非負的,

$$\int_{\mathscr{E}'_m\mathscr{E}_n} f(P)G(d\mathscr{E}) \leqslant a, \tag{135}$$

考察集合 $\mathscr{E}'_m\mathscr{E}_n$。当 n 增大时,这集合增大,而因为 $\mathscr{E}_n$ 的極限集合是 $\mathscr{E}$,所以集合 $\mathscr{E}'_m\mathscr{E}_n$ 的極限集合是 $\mathscr{E}'_m$,由此可知

$$\lim_{n\to\infty} G(\mathscr{E}'_m - \mathscr{E}'_m\mathscr{E}_n) = 0。 \tag{136}$$

既然 b 是有穷的,那末 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}'_m$ 上可和,而依公式(136)及 $f(P)$ 积分的絕对連續性,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}'_m\mathscr{E}_n} f(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}'_m} f(P)G(d\mathscr{E}),$$

而这与不等式(134)与(135)相冲突。如果 $b=+\infty$,那末用 $[f(P)]_N$ 代替 $f(P)$,取 N 与 m 足够大,使下面不等式成立:

$$\int_{\mathscr{E}'_m} [f(P)]_N G(d\mathscr{E}) > a+1。$$

依(133),

$$\int_{\mathscr{E}'_m\mathscr{E}_n} [f(P)]_N G(d\mathscr{E}) \leqslant a。$$

用上面的推理可以仍达到矛盾,而定理得証。

如果非負函数 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上的积分值有穷,那末我們說 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和。由此及上面所下的定义直接可知,如果 $f(P)$ 可和,而非負函数 $\varphi(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上滿足不等式 $\varphi(P)\leqslant f(P)$,那末 $\varphi(P)$ 也可和。現在考察在 $\mathscr{E}$ 上可測的函数,而这函数在 $\mathscr{E}$ 上可以改变符号,并把它分解成正負部分:

$$f(P) = f^+(P) - f^-(P)。 \tag{137}$$

函数 $f(P)$ 叫做在 $\mathscr{E}$ 上可和,是指 $f^+(P)$ 与 $f^-(P)$ 是可和的。如

此时积分值由下列公式定义:

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f^{+}(P)G(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}} f^{-}(P)G(d\mathscr{E})。 \quad (138)$$

如果 $f^{+}(P)$ 及 $f^{-}(P)$ 两函数中只有一个可和,那末与在[53]中一样,$f(P)$ 的积分仍有意义,但它的值等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 最常见的情形,是在其上取积分的集合 $\mathscr{E}$ 是全平面,全直綫,或整个 n 維空間。

关于在测度无穷的可测集合上的积分,[53] 中的定理及性質 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,,9, 10 都成立。我們只証明完全加法性及絕对連續性。那些定理及其余性質的証明都很簡單。首先証明下列簡單的輔助定理。

輔助定理 如果非負数 $a_k^{(s)}$ 当 s 增大时不減,而 $\lim\limits_{s\to\infty} a_k^{(s)}=a_k$,那末令

$$a^{(s)}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(s)},$$

可得

$$\lim_{s\to\infty} a^{(s)}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k。 \quad (139)$$

用归謬証法証明。注意,上写的和可能等于 $+\infty$。用 a 表示 $a^{(s)}$ 的極限,首先令

$$a>\sum_{k=1}^{\infty} a_k。$$

对于足够大的值 s,可使 $a^{(s)}>c$,而 c 是級数 (139) 的和,固定 s,可以取大的 m 值,使

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)}>\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

而因此

$$\sum_{k=1}^{m} a_k>\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

这与 $a_k\geqslant 0$ 相矛盾。現在設

$$a<\sum_{k=1}^{\infty} a_k。$$

那末对于某个固定的 m，

$$\sum_{k=1}^{m} a_k > a_{\circ}$$

現在可以取大的 s 値，使

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)} > a\ 。$$

上写的有穷和显然 $\leqslant a^{(s)}$，因此 $a^{(s)} > a$，这与 $a^{(s)}$ 序列不减而趋向于 a 相矛盾。于是輔助定理得証。

現在証明积分的完全加法性。令 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，而这集合分解成有穷多或可数无穷多可測集合 $\mathscr{E}_k$，而这些集合的測度有穷或无穷。如此則 $f(P)$ 在每个 $\mathscr{E}_k$ 上都可和。再設 $\mathscr{E}^{(1)} \subset \mathscr{E}^{(2)} \subset \cdots$ 是測度有穷的集合序列，其極限是 $\mathscr{E}$。考察測度有穷的集合 $\mathscr{E}_k^{(s)} = \mathscr{E}_k \mathscr{E}^{(s)}$。当 s 增大时这集合增大，而 $\lim\limits_{s\to\infty} \mathscr{E}_k^{(s)} = \mathscr{E}_k$，$\mathscr{E}^{(s)} = \mathscr{E}_1^{(s)} + \mathscr{E}_2^{(s)} + \mathscr{E}_3^{(s)} + \cdots$，并且右边的集合两两无公点。对于測度有穷的集合 $\mathscr{E}^{(s)}$，

$$\int_{\mathscr{E}^{(s)}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathscr{E}_k^{(s)}} f(P)G(d\mathscr{E})。$$

設函数 $f(P)$ 是正的，在这公式中令 $s\to\infty$，并应用上面的輔助定理，可得[50]中的(20)。在一般情形下，这結論也是正确的，这可以由公式(137)及它对于 $f^+(P)$ 与 $f^-(P)$ 都正确这一事实得出。

与这完全一样，可以証明[50]中的性質 6。現在証明积分的絕对連續性。設 $f(P)\geqslant 0$，并且設它在 $\mathscr{E}$ 上可和。預定正数 ε。取 m 足够大，使不等式

$$\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}} fG(d\mathscr{E}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{140}$$

成立。对于含于 $\mathscr{E}$ 中的任意集合 e，可以写

$$\int_e fG(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}^{(m)}e} fG(d\mathscr{E}) + \int_{(\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)})e} fG(d\mathscr{E})。$$

依积分在測度有穷的集合 $\mathscr{E}^{(m)}$ 上的絕对連續性，在 $\mathscr{E}^{(m)}e$ 上的积分当 $G(e)\to 0$ 时趋向于零。如此在 $\mathscr{E}^{(m)}e$ 上的积分可以取成小于

$\frac{\varepsilon}{2}$,只須取 $G(e)$ 足够小就够了。依 (140),在$(\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)})e$ 上的积分也$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。所以在 e 上的积分不大于 ε,而絕对連續性証明了。

[55]中的定理 1, 2, 3, 4 也不难推广到測度无穷的集合上去。例如可証明定理 1。設 ε 是預定的正数。取足够大的 m,使下面不等式成立:

$$\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}} F(P)G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon. \tag{141}$$

估計差 $f(P)-f_n(P)$ 的积分:

$$\left|\int_{\mathscr{E}}(f-f_n)G(d\mathscr{E})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{\mathscr{E}^{(m)}}(f-f_n)G(d\mathscr{E})\right|+\left|\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}}(f-f_n)G(d\mathscr{E})\right|. \tag{142}$$

在集合 $\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}$ 上,用不等式 $|f-f_n|\leqslant 2F$,而依(141)可得

$$\left|\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}}(f-f_n)G(d\mathscr{E})\right|\leqslant\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}}|f-f_n|G(d\mathscr{E})\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathscr{E}-\mathscr{E}^{(m)}}2FG(d\mathscr{E})\leqslant 2\varepsilon.$$

对于測度有穷的集合 $\mathscr{E}^{(m)}$,定理 1 已得証,所以存在一数 N,使当 $n>N$ 时(142)右边第一項 $\leqslant\varepsilon$。如此得当 $n>N$ 时

$$\left|\int_{\mathscr{E}}(f-f_n)G(d\mathscr{E})\right|\leqslant 3\varepsilon,$$

而既然 ε 是任意的,定理得証。[55] 中其余定理也完全同样地証明。

65. 无穷測度集合上的 L_2 类 类 L_2 的作法及正交函数的理論不难推广到測度无穷的集合 $\mathscr{E}$ 上去。我們說在測度无穷的集合 $\mathscr{E}$ 上的函数 $f(P)$ 屬于 L_2,是指它在 $\mathscr{E}$ 上可測,而它的平方 $f^2(P)$ 或它的絕对值平方 $|f(P)|^2$ 是在 $\mathscr{E}$ 上可和的函数。[56] 中的一切定理,除定理 1 外,仍旧有效。在定理 1 中本質上应用了

測度有穷这一性質。很容易举一个例，說明屬于 L_2 的函数不一定可和。例如函数 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,\infty]$ 上屬于 L_2；因为 $\frac{1}{x^2}$ 可和，但函数 $\frac{1}{x}$ 不可和。此外，証明定理 8 时也应用了測度有穷。現在証明，这定理在 $\mathscr{E}$ 的測度无穷的情形下仍旧正确。設屬于 $\mathscr{E}$ 上的 L_2 的函数序列 $f_n(P)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 自收斂。設 Δ_m 是由下面不等式定义的区間：$-m\leqslant x\leqslant m, -m\leqslant y\leqslant m$ $(m=1, 2, \cdots)$。函数 $f_n(P)$ 屬于 L_2，并在每个 Δ_m 上自收斂，因为非負函数在 Δ_m 上的积分不大于这函数在全平面上的积分。由[57]中定理 8 的証明可知从序列 $f_n(P)$ 中可取一部分序列 $f_{n_1^{(1)}}(P), f_{n_2^{(1)}}(P), \cdots$，使这部分序列在 Δ_1 上殆遍收斂。由这一序列中又可以取一新的部分序列 $f_{n_1^{(2)}}(P)$, $f_{n_2^{(2)}}(P), \cdots$，使这部分序列在 Δ_2 上殆遍收斂。如此繼續下去。不难看出，部分序列 $f_{n_1^{(1)}}(P), f_{n_2^{(2)}}(P), \cdots$，在 $\mathscr{E}$ 上殆遍收斂[比較 57]。設 $f(P)$ 是这部分序列的極限函数。旣然序列 $f_n(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上自收斂，对于任意預定的正数 ε，必存在一个数 N，使

$$\int_{\mathscr{E}}[f_{n_k^{(k)}}(P)-f_n(P)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon \text{ 当 } n_k^{(k)} \text{ 及 } n>N \text{ 时成立。}$$

无限地增加 k，与在[57]中一样，可得

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-f_n(P)]^2G(d\mathscr{E})\leqslant\varepsilon \text{ 当 } n>N \text{ 时成立，}$$

于是定理 8 証明了。

現在考察在无穷区間 $(-\infty, +\infty)$ 上关于勒貝格积分的类 L_2。对于任意元 $f(x)$ 及任意預定的正数 ε_0 必存在一个正数 N，使

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,dx-\int_{-N}^{+N}f^2(x)\,dx\leqslant\varepsilon_0\text{。}$$

定义函数 $\psi(x)$ 如下：在区間 $[-N, +N]$ 上 $\psi(x)=f(x)$，而在这区間之外 $\psi(x)=0$。依上面不等式可知

$$\|f-\psi\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-\psi(x)]^2dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{-N}f^2(x)dx+\int_{N}^{+\infty}f^2(x)dx<\varepsilon_0^2,$$

由此可知只在某一有穷区間上异于零的函数 $\psi(x)$ 組成一个綫性族，而这綫性族在 L_2 中到处稠密。由此，与在[61]中完全一样，可知在区間 $(-\infty,+\infty)$ 上連續而屬于 L_2 的函数組成一个在 L_2 中到处稠密的綫性族。与在[61]中一样，容易証明，凡在有穷区間 Δ_k 上等于常数 a_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 而在这些区間之外等于零的函数 $\omega(x)$ 組成在 L_2 中到处稠密的集合。此时并可限定数 a_k 以及区間 Δ_k 的端点都是有理的，于是与在[61]中一样，証明了 L_2 的可分性。在区間 $(-\infty,+\infty)$ 上[61]的第二定理也是正确的。在这情形中多項式已显然不屬于 L_2 了。在这情形中也可以与在[58]中一样地作由复值函数所作的类 L_2。

做为例，可取埃尔密脫函数做为区間 $(-\infty,+\infty)$ 上的封閉正交組[III; 221]:

$$\varphi_k(x)=(-1)^k e^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}),$$

而拉盖尔函数是区間 $(0,\infty)$ 上的封閉正交組[III; 184]

$$\varphi_k(x)=e^{\frac{1}{2}x}\frac{d^k}{dx^k}(x^ke^{-x})。$$

这些命題的証明可以在古朗和希勒柏特的"数学物理学方法"①一書中找到[卷 1, 88 頁]。

66. 囿变的积分函数 到此为止在研究勒貝格–斯提勒杰斯积分时曾假設函数 $G(\mathscr{E})$ 是非負的。现在轉向另一情形，即积分函数 $G(\mathscr{E})$ 是由囿变区間函数 $G(\Delta)$ 得出的。关于这种函数，有表成两个非負函数之差的典式:

① 譯者注: Courant, R. —Hilbert, D. Methoden der Mathematischen Physik。

$$G(\Delta)=G_1(\Delta)-G_2(\Delta),$$

而

$$G_1(\Delta)=\frac{1}{2}[V(\Delta)+G(\Delta)];\quad G_2(\Delta)=\frac{1}{2}[V(\Delta)-G(\Delta)],$$

并且 $V(\Delta)$ 是 $G(\Delta)$ 在区間 Δ 上的全变分。由函数 $G_1(\Delta)$ 与 $G_2(\Delta)$ 各可以得出非負的,加法的,正常函数 $G_1(\mathscr{E})$ 与 $G_2(\mathscr{E})$来,其相应的集合閉体各表做 L_{G_1} 及 L_{G_2}。用 L_G 表示 L_{G_1} 与 L_{G_2} 的公共部分,則 L_G 仍是集合的閉体。在这閉体上定义完全加法的正常函数

$$G(\mathscr{E})=G_1(\mathscr{E})-G_2(\mathscr{E})。$$

取非負的加法正常区間函数

$$V(\Delta)=G_1(\Delta)+G_2(\Delta)。$$

扩展它可得函数 $V(\mathscr{E})$,后者定义于閉体 L_V 之上。应用上面公式与函数 $G_i(\Delta)$ 的非負性,容易証明,L_V 是 L_{G_1} 及 L_{G_2} 的公共部分,就是說 L_V 与 L_G 重合。首先必須証明,对于任意集合 $\mathscr{E}$,相对于函数 $V(\Delta)$ 的外測度(就是 $|\mathscr{E}|_V$)等于相对于函数 $G_1(\Delta)$ 及 $G_2(\Delta)$ 的外測度之和:就是說 $|\mathscr{E}|_V=|\mathscr{E}|_{G_1}+|\mathscr{E}|_{G_2}$。然后,应用可測性的定义,容易証明,如果 $\mathscr{E}$ 相对于 $V(\Delta)$ 是可測的,那末它相对于 $G_1(\Delta)$ 及 $G_2(\Delta)$ 也是可測的,而反之,如果它相对于 $G_1(\Delta)$ 及 $G_2(\Delta)$ 是可測的,那末它相对于 $V(\Delta)$ 也是可測的。积分时,必須考察相对于 $V(\Delta)$ 可測的函数 $f(P)$,也就是考察相对于 $G_1(\Delta)$ 及 $G_2(\Delta)$ 可測的函数类。积分自然地由下面公式定义:

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G_1(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}} f(P)G_2(d\mathscr{E}),$$

它的存在是由右边两积分存在而决定的,而所謂存在是指这些积分的值有穷。在相反的情形下上写的公式的右边可以变成不定式。两个函数叫做相抵的,是指它們相对于 $V(\mathscr{E})$ 是相抵的。[53] 中的积分性質 1, 4, 5, 7, 8, 9 不經改变依然有效。在性質 3 中

不等式 (16) 須換成不等式

$$\left|\int_{\mathscr{E}} f(P) G(d\mathscr{E})\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} |f(P)| V(d\mathscr{E})。$$

在性質 6 中級数(49)的收斂須換成下面級数的收斂:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathscr{E}_k} |f(P)| V(d\mathscr{E}),$$

而最后,在性質 10 中不等式(50)換成不等式

$$\left|\int_{\mathscr{E}} f(P) G(d\mathscr{E})\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} F(P) V(d\mathscr{E})。$$

依积分的定义，可和函数是指相对于 $V(\mathscr{E})$ 可和的函数。[55] 中定理 1 与 2 (关于取極限值的)不經改变依然有效。

不难把积分概念推广到下面的情形；就是函数 $G(\varDelta)$ 是复值函数:

$$G(\varDelta) = G'(\varDelta) + G''(\varDelta) i,$$

而 $G'(\varDelta)$ 与 $G''(\varDelta)$ 是囿变函数。应用这两函数的典式分解,

$$G'(\varDelta) = G_1'(\varDelta) - G_2'(\varDelta); \quad G''(\varDelta) = G_1''(\varDelta) - G_2''(\varDelta),$$

可得公式

$$G(\varDelta) = (G_1'(\varDelta) - G_2'(\varDelta)) + (G_1''(\varDelta) - G_2''(\varDelta)) i。$$

由函数 $G(\varDelta)$ 可作出函数 $G(\mathscr{E})$，后者定义于閉体 L_G 上，而这閉体乃是閉体 $L_{G_k'}$ 及 $L_{G_k''}$ ($k=1, 2$)的公共部分。相对于 $G(\mathscr{E})$ 可测函数的定义和积分的定义与以前完全一样,而被积分函数也可以是复值的。

在一个变数的情形,对于囿变函数,有典式 $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$ 成立,而 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 都是不减函数；那末积分可以写成下列形式:

$$\int_{\mathscr{E}} f(x) dg(x) = \int_{\mathscr{E}} f(x) dg_1(x) - \int_{\mathscr{E}} f(x) dg_2(x)。$$

如果取全变分 $v(x) = g_1(x) + g_2(x)$,那末下面不等式成立:

$$\left|\int_{\mathscr{E}} f(x)dg(x)\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} |f(x)| d\nu(x),$$

而 $f(x)$ 依 $g_1(x)$ 及 $g_2(x)$ 的可和性与其依 $\nu(x)$ 的可和性同效。

67. 特殊情形　在建立积分概念时，我們把那积分的基本集合分成一切可能的可測集合。在特殊情形中可以把积分的基本区域分成更特殊形式的部分区域。在本节中关于这問題要作一些注語，并为簡單起見設被积分函数是有界的。設积分是取于某一 B 集合 $\mathscr{E}$ 之上。作和

$$s_\delta = \sum_{k=1}^{n} m_k G(\mathscr{E}_k),$$

这与某一分割法 $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \cdots + \mathscr{E}_n$ 相应。把每一集合 $\mathscr{E}_k$ 换成集合 $\mathscr{E}'_k$，后者乃是含于 $\mathscr{E}_k$ 中的 B 集合，并滿足 $G(\mathscr{E}'_k) = G(\mathscr{E}_k)$。此时在 $\mathscr{E}'_k$ 上取的函数值下确界 m'_k 不小于 m_k，而剩余的集合 $\mathscr{E} - (\mathscr{E}'_1 + \mathscr{E}'_2 + \cdots + \mathscr{E}'_n)$ 是 B 集合，其測度是零。

与新分割法 δ' 相应的和 $s_{\delta'}$ 是

$$s_{\delta'} = \sum_{k=1}^{n} m'_k G(\mathscr{E}'_k),$$

这和不小于前面那和，而如此在决定 s_δ 的上确界时（这就是积分值），可以把 $\mathscr{E}$ 只分成 B 集合。所以如果基本集合是 B 集合，那末在作积分时只須把这集合分解成 B 集合。

設基本集合 $\mathscr{E}$ 是开集合。可以取一个含于 $\mathscr{E}_k$ 中的閉集合 F_k，使

$$0 \leqslant G(\mathscr{E}_k) - G(F_k) \leqslant \varepsilon_k \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

而 ε_k 是預定的正数。

所余的集合 $\mathscr{E}' = \mathscr{E} - (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$ 是开集合，而 $G(\mathscr{E}') \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon_0$。令 δ' 是新分割，把 $\mathscr{E}$ 分成閉的及开的集合 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \mathscr{E}'$，而 m'_k 及 m' 是 $f(P)$ 在 F_k 及 $\mathscr{E}'$ 上諸值的下确界。那末 $m'_k \geqslant m_k$，而

$$s_\delta = \sum_{k=1}^{n} m_k G(\mathscr{E}_k); \quad s_{\delta'} = \sum_{k=1}^{n} m'_k G(F_k) + m' G(\mathscr{E}')。$$

如果 $|f(P)| \leqslant L$，那末依前边的估計，$s_{\delta'} \geqslant s_\delta - 3L\varepsilon_0$，而既然 ε_0 是任意的，由此可知，在取和 s_δ 的上确界时只須考虑 $s_{\delta'}$，而在作这种和时只分割成开的与閉的集合，就是說，在开集合上积分时只須分解基本集合成开的与閉的集合。

如果 $\mathscr{E}$ 是有界开集合，而 $f(P)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上一致連續的，那末积分是黎曼-斯提勒杰斯和的極限：

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(P_k)G(\mathscr{E}_k),$$

只須諸集合 $\mathscr{E}_k$ 的直徑中之最大者趋向于零。提醒一下，所謂集合的直徑是这集合中两任意点間距离的上确界，上面結論之正确性可以由下面事实看出，即由于 $f(P)$ 的一致連續性 $S_\delta-s_\delta$ 在上述条件之下趋向于零[3]。

这时只須設在开集合 $\mathscr{E}$ 上連續的函数 $f(P)$ 是有界的也就够了。我們可以作一序列逐漸扩大的开集合 $\mathscr{E}^{(n)}$，使其極限是 $\mathscr{E}$，而 $\mathscr{E}^{(n)}$ 的閉包 $\overline{\mathscr{E}^{(n)}}$ 位于 $\mathscr{E}^{(n+1)}$ 之中。如果这时凡与任意 $\mathscr{E}^{(n)}$ 有公点的部分集合 $\mathscr{E}_k$ 的直徑中最大者趋向于零，那末与上面一样，直接可知，$S_\delta-s_\delta$ 趋于零。基本开集合 $\mathscr{E}$ 可以是无界的，但有有穷的測度[比較4]。

設有一測度有穷的开集合 $\mathscr{E}_0$，而測度是由函数 $G(\mathscr{E})$ 决定的。为簡單起見可設由 $\mathscr{E}_0$ 的界点組成的集合 l_0（它是閉的）有零測度，就是說 $G(l_0)=0$。設 $\mathscr{E}'$ 是屬于 $\mathscr{E}_0$ 的开集合，而 l' 是由 $\mathscr{E}'$ 的界点所成的集合。如果 $G(l')=0$，那末集合 $\mathscr{E}'$ 叫做正則集合或是函数 $G(\mathscr{E})$ 的連續区域。依函数 $G(\mathscr{E})$ 的正常性，正則集合的特征如下：如果 $\mathscr{E}_n$ 是开集合的縮序列，而其極限是集合 $\mathscr{E}'$ 的閉包 $\overline{\mathscr{E}'}$，那末 $G(\mathscr{E}_n)\to G(\mathscr{E}')$。这与下述者同效：如果用 $\underline{\mathscr{E}_0-\mathscr{E}'}$ 表集合 $\mathscr{E}_0-\mathscr{E}'$ 中内点的集合，那末

$$G(\mathscr{E}')+G(\underline{\mathscr{E}_0-\mathscr{E}'})=G(\mathscr{E}_0)。$$

可以說，对于正則集合，其周界上的全部質量等于零。如果取某一开集合的縮序列，而这序列是依存于某一連續变化的参数的，并且每个集合的周界含于它前面那集合的内部，那末在这序列开集合之中只能有有穷多或可数无穷多个集合不是正則集合。这証明与以前証明間断点数有穷或可数无穷时完全一样[6]。如此，相对于上述的参数，在任意預定的开集合的任意近处必有正則集合。

作 $\mathscr{E}_0$ 上的积分时可以分解 $\mathscr{E}_0$ 成开的正則集合，并在其相应和 s_δ, S_δ 及 σ_δ 中考察 $G(\mathscr{E})$ 在分解出的开集合上的值，而在定确界时只在上述那些开集合的点上取被积分函数 $f(P)$ 的值。由上述諸正則开集合的界上諸点組成的閉集合是測度为零的，而略去这些集合并不影响上述和与积分的数值。如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}_0$ 是一致連續的（比如說），可以引用无限地細分上述正則集合时的任意序列 σ_δ。再注意一个事实。如果我們設被积分函数在积分基本集合 $\mathscr{E}_0$ 之外等于零，那末做为积分区域可以取足够"好"而包含 $\mathscr{E}_0$ 的集合；例如設 $\mathscr{E}_0$ 是有穷的，則可取一包含 $\mathscr{E}_0$ 的有穷开区間。

68. 重积分的約簡 我們轉向研究勒貝格重积分論的基本結果，把重积分化成累次的單积分。回忆一下以前重积分論中的相应結果 [II; 97]。如果函数 $f(x, y)$ 在有穷閉区間 $\Delta[a\leqslant x\leqslant b; c\leqslant y\leqslant d]$ 之上連續，那末把重积分化成两次單积分的公式成立：

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx=$$

$$=\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy。$$

現在对于勒貝格积分陈述相类的定理。这定理首先由意大利数学家傅必尼在 1907 証明的。

傅必尼定理 設 $f(x, y)$ 是在有穷区間 $\Delta[a\leqslant x\leqslant b; c\leqslant y\leqslant d]$ 上的可和函数。如此則对于区間 $[a, b]$ 中的殆遍 x 值，$f(x, y)$ 在区間 $[c, d]$ 上都是对于 y 可和的，而函数

$$h(x)=\int_c^d f(x, y)dy, \tag{143}$$

在区間 $[a, b]$ 上殆遍有定义，在这区間上可和，并且等式

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx \tag{144}$$

成立。交換积分次序而得的完全相类的命題也成立。如此可得公式

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dx\,dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy。 \tag{145}$$

注意在上述定理之中，积分都是取做勒貝格的意义的，而函数的可和性也是依这种意义的、关于函数可和性的結論自然包含着关于其可測性的結論。应当注意函数 (143) 可以并不定义于区間 $[a, b]$ 的一切点处，但总是在这区間中殆遍定义的。关于函数

$$l(y)=\int_a^b f(x, y)dx \tag{146}$$

也有同样的按語。傅必尼定理的証明相当复杂，为了証明較清楚

起見，上面把定理的陈述限于特殊情形。下面将指出各种更一般的陈述。为了証明定理先叙述几个輔助定理。

輔助定理 1. 如果对于在区間 Δ 上可和的函数 $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\cdots$, $f_m(x, y)$ 傅必尼定理正确，那末对于这些函数的任意綫性組合式

$$f(x, y)=\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x, y), \tag{147}$$

这定理也成立。

如果由变数 x 的区間上去掉某一测度为零的集合 A_k，每个上述的函数 $f_k(x, y)$ 依輔助定理的条件是在区間 $[c, d]$ 上依 y 可和的。如果从区間 $[a, b]$ 上去掉集合 $A=A_1+A_2+\cdots+A_m$，那末对于其余諸 x 值函数 (147) 在区間 $[c, d]$ 上依 y 是可和的，而 A 的測度是零。凡函数

$$h_k(x)=\int_c^d f_k(x, y)dy$$

在 $[a, b]$ 上除去集合 A 外都有定义。依輔助定理的条件，对于函数 $f_k(x, y)$，公式(144)成立。注意和的积分規則及由积分号下取出常数因子的法則可知公式(144)对于函数(147)也正确。輔助定理于是証明了。

附注 如果关于函数 $f_k(x, y)$ 只設它們对于区間 $[a, b]$ 中的殆遍 x 值在区間 $[c, d]$ 上依 y 是可測的，那末显然关于函数(147)同样的結論成立，因为可測函数之和仍是可測的。

輔助定理 2. 設在区間 Δ 上可和函数 $f_n(x, y)$ 的單調序列收斂于在 Δ 上可和的函数 $f(x, y)$。如果对于一切函数 $f_n(x, y)$ 傅必尼定理成立，那末对于極限函数这定理也成立。

証明时可設 $f_n(x, y)$ 是不減序列。不增序列的情形可以化成不減的情形，只須把 $f_n(x, y)$ 換成 $-f_n(x, y)$ 就够了。依輔助定理的条件函数 $f_n(x, y)$ 中每一个在区間 $[c, d]$ 上依 y 是可測的并

且是可和的，如果从变数 x 的区間 $[a, b]$ 上去掉某一测度为零的集合 A_n。如果从 $[a, b]$ 去掉集合 $A=A_1+A_2+\cdots$（这集合的测度也是零）；那末对于所余的 x 值集合極限函数 $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上对于 y 是可测的。依輔助定理的条件，每个函数

$$h_n(x)=\int_c^d f_n(x, y)dy \tag{148}$$

在除掉测度为零的 x 值集合 A_n 后的 $[a, b]$ 上有定义。如果从 $[a, b]$ 上去掉测度为零的集合 A，那末(148)中一切函数对于所余諸 x 值都有定义，就是説这些函数在集合 $[a, b]-A$ 上定义，而依条件，在 $[a, b]$ 上可和。序列 $h_n(x)$ 是增序列，于是可在 $[a, b]$ 上殆遍定义其可测的極限函数 $h(x)=\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$。注意依条件对于函数 $f_n(x, y)$ 傅必尼定理适用，而依条件極限函数在 Δ 上可和，我們可以写

$$\int_a^b h_n(x)dx=\iint\limits_{\Delta} f_n(x, y)dx\,dy\leqslant\iint\limits_{\Delta} f(x, y)dx\,dy。$$

由此，依[55]的定理 2 我們可以結論，$h(x)$ 在 $[a, b]$ 上可和，而下面公式成立：

$$\int_a^b h(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Delta} f_n(x, y)dx\,dy。$$

另一方面，依[55]的定理 2，

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Delta} f_n(x, y)dx\,dy=\iint\limits_{\Delta} f(x, y)dx\,dy,$$

而如此可以写

$$\int_a^b h(x)dx=\iint\limits_{\Delta} f(x, y)dx\,dy。 \tag{149}$$

我們曾定义函数 $h(x)$ 如下：

$$h(x)=\lim_{n\to\infty} h_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_c^d f_n(x, y)dy。$$

为了完全証明輔助定理，还須証明函数 $f(x, y)$ 对于 $[a, b]$ 上殆遍

x 值在$[c, d]$上依 y 可和，而凡函数 $h(x)$ 在$[a, b]$上殆遍可以用下列公式表示：

$$h(x)=\int_c^d f(x, y)dy。 \tag{150}$$

証明了这点之后，依(149)，可知对于函数$f(x, y)$傅必尼定理完全成立。設 B 是$[a, b]$中凡使 $h(x)$ 确定并等于 $+\infty$ 的一切点所成的集合。依 $h(x)$ 的可和性，集合 B 的測度等于零。如果从$[a, b]$上去掉測度为零的集合 $A+B$，那末在所余集合上，就是說殆遍在$[a, b]$上，增序列 $h_n(x)$ 趋向于函数 $h(x)$，而 $h(x)$ 只取有穷值，就是說对于凡屬于集合 $[a, b]-(A+B)$的点 x，函数$f_n(x, y)$ 的不减序列在$[c, d]$上依 y 的积分为数$h(x)$所界。依[55]中的定理2，对于上述的这些 x 值，$f(x,y)$ 对于 y 在$[c, d]$上可和，而公式

$$\int_c^d f(x, y)dy=\lim_{n\to\infty}\int_c^d f_n(x, y)dy$$

成立，并且依(148)，在$[a,b]$上函数 $h(x)$殆遍由公式(150)表示。如此輔助定理証明了。

附注 由上面証明的开始直接可知，如果关于函数 $f_n(x, y)$ 只設它对于$[a, b]$上的殆遍 x 值在$[c, d]$上依 y 可測，那末極限函数 $f(x, y)$对于$[a, b]$上的殆遍 x 值是依 y 可測的。

69. 特征函数的情形 本节的目的在于就一特殊情形証明傅必尼定理；这情形是积分号下函数乃是屬于所論区間 Δ 中某可測集合 $\mathscr{E}$ 的特征函数。$\omega_{\mathscr{E}}(P)=\omega_{\mathscr{E}}(x, y)$ 的积分显然是集合 $\mathscr{E}$ 的測度 $m(\mathscr{E})$，而 $\mathscr{E}$ 是平面上的集合。設 $\mathscr{E}_{x_0}$ 是 $\mathscr{E}$ 中横坐标为 x_0 的諸点所成的集合，就是說 $\mathscr{E}_{x_0}$ 乃是 $\mathscr{E}$ 与直綫 $x=x_0$ 的相交部分，而这集合的特征函数乃是 $\omega_{\mathscr{E}}(x_0, y)$。$\mathscr{E}_{x_0}$ 相对于 y 的可測性与函数 $\omega_{\mathscr{E}}(x_0, y)$在区間$[c, d]$上的可測性同效，而如果真的是可測的，那末 $\mathscr{E}_{x_0}$ 的一維測度（表示成 $m'(\mathscr{E}_{x_0})$）等于 $\omega_{\mathscr{E}}(x_0, y)$在上述区間上的积分。$\omega_{\mathscr{E}}(x_0, y)$的可測性是由其有界性而保証的。如此对于特

征函数 $\omega_{\mathscr{E}}(x, y)$ 傅必尼定理变成了下列結論：函数 $\omega_{\mathscr{E}}(x, y)$ 对于 $[a, b]$ 上的殆遍 x 值在区間 $[c, d]$ 上依 y 可测，而有界函数

$$h(x)=m'(\mathscr{E}_x)=\int_c^d \omega(x, y)dy$$

在 $[a, b]$ 上可测，并且下面公式成立：

$$m(\mathscr{E})=\int_a^b\left[\int_c^d \omega(x, y)dy\right]dx。\tag{151}$$

簡言之，对于殆遍 x 值 $\mathscr{E}_x$ 依 y 可测，而下面公式成立：

$$m(\mathscr{E})=\int_a^b m'(\mathscr{E}_x)dx。\tag{152}$$

对于特征函数，我們将逐步地証明傅必尼定理。

輔助定理 3. 对屬于 Δ 的任意半开区間，开集合，及集合 G_δ 的特征函数，傅必尼定理正确。

如果有一屬于 Δ 的半开区間 $\Delta'[\alpha<x\leqslant\beta; \gamma<y\leqslant\delta]$，那末 $\omega_{\Delta'}(x, y)$ 对于任意 x 值是依 y 可测的，而如 $\alpha<x\leqslant\beta$，

$$h(x)=\int_c^d \omega_{\Delta'}(x, y)dy=\delta-\gamma,$$

如果 x 在 $\alpha<x\leqslant\beta$ 之外，$h(x)=0$，輔助定理是显然的，因为 Δ' 的测度等于积 $(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$。开集合 $\mathscr{E}_0$ 是可数多个互无公点的半开区間 Δ_k 之和，而

$$\omega_{\mathscr{E}_0}(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{\Delta_k}(x, y)。$$

依輔助定理 1，傅必尼定理对于有穷和

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_{\Delta_k}(x, y),$$

是正确的。当 m 增加时，这些和成为非减序列，而这序列趋向于有界的、从而是可和的、函数 $\omega_{\mathscr{E}_0}(x, y)$，因此依輔助定理 2 傅必尼定理对于 $\omega_{\mathscr{E}_0}(x, y)$ 是正确的。最后設 $\mathscr{E}'_0$ 是屬于开区間 Δ 的某集合 G_δ。可以把它表示成下列形式

$$\mathscr{E}'_0=\prod_{k=1}^{\infty} O_k, \tag{153}$$

而 O_k 是屬于开区間 Δ 的开集合。注意，如果有某一 O_k 不屬于开区間 Δ，那末我們可以把 O_k 換成 O_k 与开区間 Δ 之交。依(153)，$\omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)$ 是开集合

$$\mathscr{E}_m=\prod_{k=1}^{m} O_k$$

的特征函数 $\omega_{\mathscr{E}_m}(x,y)$ 所組成的不增序列的極限，而既然傅必尼定理对于 $\omega_{\mathscr{E}_m}(x,y)$ 成立，依輔助定理 2 它对于 $\omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)$ 也正确。如果 G_δ 型集合 $\mathscr{E}'_0$ 中的某些点在 Δ 的周上，那末可以扩大 Δ，使 $\mathscr{E}'_0$ 位于扩大后的区間 Δ_0 之內。傅必尼定理对于 $\omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)$ 在 Δ_0 上成立。由此，注意在 Δ 之外 $\omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)=0$，直接可知傅必尼定理对于 $\omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)$ 在区間 Δ 上也成立。注意凡在本輔助定理中所考察的 $\omega_{\mathscr{E}}(x,y)$ 都对于一切 x 值是依 y 可測的。

輔助定理 4. 如果 $\mathscr{E}$ 是屬于 Δ 的集合，而其平面測度是零，那末对于 $[a,b]$ 中几乎一切 x 点，一維測度 $\mathscr{E}_x$ 等于零，而对于 $\omega_{\mathscr{E}}(x,y)$ 傅必尼定理成立。

作屬于 Δ 的 G_δ 型集合 $\mathscr{E}'_0$，使它复蓋 $\mathscr{E}$，而使 $m(\mathscr{E}'_0-\mathscr{E})=$ $=0$[36]。那末 $\mathscr{E}'_0=\mathscr{E}+(\mathscr{E}'_0-\mathscr{E})$，而既然 $m(\mathscr{E})=0, m(\mathscr{E}'_0-\mathscr{E})=$ $=0$，那末 $m(\mathscr{E}'_0)=0$。对于 $\mathscr{E}'_0$ 傅必尼定理成立，而可以写

$$\int_a^b\left[\int_c^d \omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)\,dy\right]dx=0。$$

位于方括号之內的量是非負的，依 [50] 中的性質 14，在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上殆遍有

$$\int_c^d \omega_{\mathscr{E}'_0}(x,y)\,dy=0。$$

由此可以看出，集合 $\mathscr{E}'_0$ 与几乎一切平行于 y 軸的直綫的相交部分的一維測度都等于零。

因为 $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}'_0$，所以对于集合 $\mathscr{E}$ 上述的性質更成立，就是說，对

于 $[a, b]$ 中的殆遍 x 値，

$$\int_c^d \omega_{\mathscr{E}}(x, y)dy = 0,$$

因此，对于 $\omega_{\mathscr{E}}(x, y)$ 傅必尼定理成立：

$$m(\mathscr{E}) = 0 = \int_a^b \left[\int_c^d \omega_{\mathscr{E}}(x, y)dy\right]dx。$$

輔助定理 5. 对于 Δ 中任意可测集合 $\mathscr{E}$ 的特征函数 $\omega_{\mathscr{E}}(x,y)$，傅必尼定理成立。

作屬于 Δ 的 G_δ 型集合 $\mathscr{E}_0'$，使它复盖 $\mathscr{E}$，并滿足 $m(\mathscr{E}_0'-\mathscr{E}) = 0$。依輔助定理 3 及 4，傅必尼定理对于集合 $\mathscr{E}_0'$ 及 $\mathscr{E}_0'-\mathscr{E}$ 的特征函数都成立。但 $\omega_{\mathscr{E}}(x, y) = \omega_{\mathscr{E}_0'}(x, y) + \omega_{\mathscr{E}_0'-\mathscr{E}}(x, y)$，而依輔助定理 1，傅必尼定理对于 $\omega_{\mathscr{E}}(x, y)$ 也成立。

注意，如果可测无界集合 $\mathscr{E}$ 的测度有穷，那末 $\mathscr{E}_x$ 对于殆遍 x 値都可测，并且公式(152)成立。这結論可以由有界集合情形取極限値而直接得出。如此容易証明，如果 $\mathscr{E}$ 只是可测的，那末 $\mathscr{E}_x$ 对于殆遍 x 値都是可测的。如果此外 $m(\mathscr{E}_x)$ 是可和的，那末 $\mathscr{E}$ 的测度有穷，而公式(152)成立。輔助定理 4 显然对于无界集合也成立。

70. 傅必尼定理 为了完全証明傅必尼定理，还須要一个簡單的輔助定理。

輔助定理 設 $f(x, y)$ 是 Δ 上一个可测函数，并在 Δ 上只取有穷多个有穷値，那末傅必尼定理对于 $f(x, y)$ 成立。

設 $\Delta = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \cdots + \mathscr{E}_m$，而当点 (x, y) 屬于集合 $\mathscr{E}_k$ 时，$f(x, y) = c_k (k=1, 2, \cdots, m)$。我們可以把 $f(x, y)$ 表示成集合 $\mathscr{E}_k$ 的特征函数的綫性組合式：

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^m c_k \omega_{\mathscr{E}_k}(x, y),$$

而傅必尼定理由輔助定理 1 及 5 直接得出。

在上面那些輔助定理的基础上，傅必尼定理的証明就很容易

了。設 $f(x, y)$ 在 Δ 上可和。分解它成正負部分：$f(x, y)=f^{+}(x, y)-f^{-}(x, y)$。依輔助定理 1，只須証明对于 f^{+} 及 f^{-} 傅必尼定理成立就够了，就是說，在証明中无妨設可和函数 $f(x, y)$ 是非負的。由 [47] 得知，如此的函数可以表示成一个不减的函数序列的極限函数，而这序列中的函数 $f_n(x, y)$ 是可測的、非負的、并且只取有穷多个值。依輔助定理 6，傅必尼定理对于函数 $f_n(x, y)$ 成立，所以依輔助定理 2，这定理对于 $f(x, y)$ 也成立，于是傅必尼定理就証明了。

注意，在傅必尼定理中，曾假設 $f(x, y)$ 在区間 Δ 上可和。在这条件之下，依傅必尼定理，在公式(144)及(145)中右边的两次积分有意义，并給出 $f(x, y)$ 在 Δ 上的重积分来。如果右边积分有意义，而反过来断定重积分存在，那是不正确的。有例存在，証明在公式 (144) 及 (145) 右边的积分存在，并且积分的結果彼此相等，但函数 $f(x, y)$ 在 Δ 上是不可測的，或可測而不可和。但如果 $f(x, y)$ 在区間 Δ 上是非負的，那末反过来的結論也是正确的，而下面的定理成立。

定理 如果 $f(x, y)$ 在区間 Δ 上可測并是非負的，那末由公式 (144) 中右边累次积分的存在可知函数 $f(x, y)$ 在 Δ 上是可和的，并且对于这函数傅必尼定理成立。

設公式(144)右边的累次积分有意义，就是說，函数(143)对于区間 $[a, b]$ 上殆遍 x 值是存在的，并且在区間 $[a, b]$ 上可和。取函数

$$[f(x, y)]_n=\begin{cases} n & \text{如果 } f(x, y)>n, \\ f(x, y) & \text{如果 } f(x, y)\leqslant n。\end{cases}$$

这些函数是有界的、可測的、并且組成一个不减序列，其極限是 $f(x, y)$。显然这些函数是在 Δ 上可和的，而对于它們，傅必尼定理成立。我們可以写

$$\iint_{\varDelta} [f(x, y)]_n \,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d [f(x, y)]_n dy \right] dx。$$

但 $[f(x, y)]_n \leqslant f(x, y)$，所以

$$\iint_{\varDelta} [f(x, y)]_n dx\,dy \leqslant \int_a^b h(x)dx,$$

由此可知[53]$f(x, y)$在 $\varDelta$ 上可和。

系 1. 如果 $f(x, y)$ 变号，但对于 $|f(x, y)|$ 两个累次积分之中有一个存在，那末依定理 $|f(x, y)|$ 是可和的，因此 $f(x, y)$在 $\varDelta$ 上也可和，而对于它傅必尼定理仍适用。

系 2. 如果 $f(x, y)$ 在 $\varDelta$ 上可测，并且对于殆遍 x 值都是依 y 可和的，那末由公式 (143) 定义的函数 $h(x)$ 是可测函数。与通常一样，仍可設 $f(x, y)$ 是非負的。对于有界的函数 $[f(x, y)]_n$ 傅必尼定理成立，而

$$h_n(x) = \int_c^d [f(x, y)]_n dy$$

可測。无限地增加 n，可知其極限函数 $h(x)$ 也是可測的。

注意几个傅必尼定理的簡單推广。如果 $f(x, y)$ 在可测有界集合 $\mathscr{E}$ 上可和，那末下面公式成立：

$$\iint_{\mathscr{E}} f(x, y)dx\,dy = \int_{B_x} \left[\int_{\mathscr{E}_x} f(x, y)dy \right] dx =$$

$$= \int_{B_y} \left[\int_{\mathscr{E}_y} f(x, y)dx \right] dy, \tag{154}$$

其中 $\mathscr{E}_x$ 是 $\mathscr{E}$ 中凡横坐标为 x 的点所成的集合，$\mathscr{E}_y$ 是 $\mathscr{E}$ 中凡縱坐标为 y 的点所成的集合，B_x 及 B_y 各是 $\mathscr{E}$ 在 X 軸与 Y 軸上的投影。在 $\mathscr{E}_x$ 及 $\mathscr{E}_y$ 上的积分可能对某些 x 及 y 值无意义，但这些值所成的集合的測度是零。为了証明公式(154)，只須用有穷区間 $\varDelta$ 复盖 $\mathscr{E}$，并作一函数 $f_0(x, y)$，使它在 $\mathscr{E}$ 的点处等于 $f(x, y)$，而在 $\varDelta$ 中不屬于 $\mathscr{E}$ 的点处等于零。現在說明，如何把傅必尼定理推广到无界集合的情形。作为例子，可以考察整个平面。我們只須考

察非负函数。如此，設函数 $f(x, y)$ 在全平面上可测、非负、并可和，就是說，下面的重积分存在：

$$A=\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy。 \tag{155}$$

函数 $f(x, y)$ 在任意有穷区間 $\Delta_{mn}[-m\leqslant x\leqslant m; -n\leqslant y\leqslant n]$ 上也是可和的。在如此的区間上，傅必尼定理成立：

$$\iint_{\Delta_{mn}} f(x, y)\,dx\,dy=\int_{-m}^{+m}\left[\int_{-n}^{+n} f(x, y)\,dy\right]dx。$$

另一方面，既然函数 $f(x, y)$ 是非負的，那末

$$\iint_{\Delta_{mn}} f(x, y)\,dx\,dy\leqslant A,$$

所以

$$\int_{-m}^{+m}\left[\int_{-n}^{+n} f(x, y)\,dy\right]dx\leqslant A。$$

无限地增加 n，并应用[55]中的定理 4，可得

$$\int_{-m}^{+m}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy\right]dx\leqslant A。$$

再增加 m，并应用无穷直綫上积分的定义，可得不等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy\right]dx\leqslant A。 \tag{156}$$

最后，証明上面不等式中的 $<$ 号不能成立。如果它果真成立，那末必存在一个正数 α，使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy\right]dx< A-\alpha,$$

从而

$$\iint_{\Delta_{nn}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-n}^{+n}\left[\int_{-n}^{+n} f(x, y)\,dy\right]dx< A-\alpha,$$

而这不可能，因为在区間 Δ_{nn} 上的积分当无限地增大 n 时必須趋向于积分(155)。如此，在公式(156)中必然只有等号成立，而比較(155)，可知在全平面上傅必尼定理也成立。由上面的証明显然可

知在这公式中出现的累次积分也存在。

也可以对于任意維的积分陈述傅必尼定理。我們陈述其相应結果。設 Δ_{m+n} 是空間 R_{m+n} 中的区間，其維数是 $m+n$，并且由下面不等式組定义：

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1;\quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2;\quad \cdots;\quad a_{m+n} \leqslant x_{m+n} \leqslant b_{m+n},$$

而 Δ_m 与 Δ_n 各是空間 R_m 及 R_n 中的区間，各由下面的不等式組定义：

$$\Delta_m:\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1;\quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2;\quad \cdots;\quad a_m \leqslant x_m \leqslant b_m;$$

$$\Delta_n:\ a_{m+1} \leqslant x_{m+1} \leqslant b_{m+1};\quad \cdots;\quad a_{m+n} \leqslant x_{m+n} \leqslant b_{m+n}。$$

再設 $f(P)$ 是在区間 Δ_{m+n} 上可和的函数。如果固定 Δ_m 中一点 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$，那末对于在 R_m 中一个测度为零的集合以外任意选擇的 P_0 点，$f(P)$ 都是在 Δ_n 中可和的函数。$f(P)$ 在 Δ_n 上的积分

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \int_{\Delta_n} f(P)\,dx_{m+1}dx_{m+2}\cdots dx_{m+n}$$

乃是在 Δ_m 上可和的函数，而下面公式成立：

$$\int_{\Delta_{m+n}} f(P)\,dx_1dx_2\cdots dx_{m+n} =$$

$$= \int_{\Delta_m}\left[\int_{\Delta_n} f(P)\,dx_{m+1}dx_{m+2}\cdots dx_{m+n}\right]dx_1\,dx_2\cdots dx_m。\quad (157)$$

傅必尼定理还可以簡單地推广到勒貝格–斯提勒杰斯积分的情形上去。設有两个有界增函数 $g(x)$ 及 $k(x)$。使用这两函数，可以定义半开区間的测度 $G(\Delta)$ 及 $K(\Delta)$，然后扩展这些函数到閉体 L_G 及 L_K 上去。如此可以得到 L_G 及 L_K 上的加法非負正常函数 $G(\mathscr{E})$ 及 $K(\mathscr{E})$。同样，由定义于平面上的函数 $g(x)k(y)$ 出發，可以作出一个加法非負正常函数 $M(\mathscr{E})$，后者定义于平面上集合的一个閉体 L_M 上。如果 $f(P)=f(x, y)$ 依 $M(\mathscr{E})$ 可测，并在平面的某区間 Δ 上可和，那末这函数在与平面的区間 Δ 相应的 Y 軸

上区間 Δ_y 之上依函数 $K(\mathscr{E})$ 是可和的，

$$h(x)=\int_{\Delta_y}f(x,y)K(d\mathscr{E})=\int_{\Delta_y}f(x,y)dk(y),$$

但須从与平面的区間 Δ 相应的 X 軸上区間 Δ_x 中去掉一个依 $G(\mathscr{E})$ 测度为零的集合。函数 $h(x)$ 在 Δ_x 上依 $G(\mathscr{E})$ 可和，并且下面公式成立：

$$\iint_{\Delta}f(P)M(d\mathscr{E})=\iint_{\Delta}f(x,y)dd[g(x)\ k(y)]=$$

$$=\int_{\Delta_x}\left[\int_{\Delta_y}f(x,y)dk(y)\right]dg(x)。\qquad(158)$$

变换积分的次序，可以得出相类的第二公式。这个傅必尼定理的推广的証明与傅必尼基本定理字句上完全一样，只是到处把勒貝格积分换成勒貝格-斯提勒杰斯积分，而依勒貝格意义的可测性要换成依函数 $G(\mathscr{E})$, $K(\mathscr{E})$, $M(\mathscr{E})$ 的可测性。

附注 注意，如果关于函数 $f(x,y)$，只設它在平面区間 Δ 上可测，那末由此可知：对于 $[a,b]$ 中的殆遍 x 值，这函数依 y 在 $[c,d]$ 上是可测的，而对于 $[c,d]$ 中的殆遍 y 值，它依 x 在 $[a,b]$ 上也是可测的。这命題可以直接由輔助定理 1 与 2 的証明后面以及傅必尼定理証明后面的附注得出。

71. 积分次序的改变 再举出一个关于积分次序交换的定理。

定理 設函数 $g(x,t)$ 对于区間 $[a,b]$ 上的一切 x 值都是在区間 $[c,d]$ 上依 t 可和的，并且对于 $[c,d]$ 上的一切 t 值，除掉具有勒貝格测度等于零的一个 t 值集合外，依 x 在 $[a,b]$ 上是囿变函数。再設对于上述一切 t 值，函数 $g(x,t)$ 依 x 在区間 $[a,b]$ 上的全变分不超过在 $[c,d]$ 上的一个非負可测函数 $F(t)$，并且积分

$$\int_c^d F(t)dt \qquad(159)$$

存在。那末函数

$$\int_c^d g(x,t)dt \qquad(160)$$

是在$[a, b]$上依x的囿变函数，而对于$[a, b]$上任意一个連續函数$f(x)$，下面公式成立：

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x) d_x g(x, t)\right] dt = \int_a^b f(x) d_x \left[\int_c^d g(x, t) dt\right], \tag{161}$$

而依t所取的积分是勒贝格积分。

为了証明函数(160)是囿变函数，分割区間$[a, b]$成部分：$a = x_0 < x_1 < < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，并对于这分割作和$t_\delta$[8]。于是得

$$t_\delta = \sum_{k=1}^n \left| \int_c^d g(x_k, t) dt - \int_c^d g(x_{k-1}, t) dt \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left| \int_c^d [g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)] dt \right|,$$

由此，

$$t_\delta \leqslant \int_c^d \sum_{k=1}^n |g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)| dt.$$

但依定理的条件，

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)| \leqslant F(t),$$

所以

$$t_\delta \leqslant \int_c^d F(t) dt,$$

而由此得知，函数(160)是囿变函数。写出显然的公式

$$\int_c^d \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k, t) - g((x_{k-1}, t)] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \left[\int_c^d g(x_k, t) dt - \int_c^d g(x_{k-1}, t) dt\right], \tag{162}$$

其中ξ_k是区間$[x_{k-1}, x_k]$中某一点。无限地細分部分区間时，上面公式的右边趋向于公式(161)右边的积分。对于区間$[a, b]$上的連續函数$f(x)$，下面不等式成立：$|f(x)| \leqslant L$，而L是某一正数。关于公式(162)左边的积分号下函数，有下列关系成立：

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{k=1}^n |g(x_k, t) - g(x_{k-1}, t)| \leqslant LF(t).$$

使用[65]中的定理1，可知在公式(162)中左边的积分里，当无限地細分部分区間时可以在积分号下取極限值，而上述那个积分号下函数的極限乃是斯提

勒杰斯积分

$$\int_a^b f(x)\,d_x g(x,t)。$$

最后在公式(162)中取極限值就得出公式(161)来。剛才証明的定理有几个簡單的推广。例如可以設区間$[a, b]$无穷，而函数$f(x)$在这区間之内部連續并有界。依t取的勒貝格积分可以換成勒貝格-斯提勒杰斯积分。依$g(x, t)$取的初等斯提勒杰斯积分可以換成一般斯提勒杰斯积分，而可以設函数$f(x)$只是在区間$[a, b]$内有界的。如此由公式(161)右边积分的存在可以推知左边积分的存在，并且这两积分相等。

附　录

論把勒貝格重积分化成累次积分

庫德良夫采夫与卡什欽科(Кудрявцев, Л. Д. и Кащенко, Ю. Д.)(原载"数学科学的进展"第七卷第六期(1952)，211—212頁)

在斯米尔諾夫"高等数学教程"第五卷(1947年版，以下簡称"教程")中，在陈述一般的傅必尼定理时有一点不正确，本文目的就在于消除这一点。

今引入下面經常使用的符号与假定：n, p, q是自然数，使$n=p+q$，E^n，E^p与E^q是維数各为n, p, q的欧几里得空間，而E^n是E^p与E^q之直和。空間E^n中的点将表为(x, y)，其中$x\in \in E^p$，$y\in E^q$。所謂测度，恒指勒貝格测度，并用符号mes表示，而对于包含在E^n，E^p，E^q中的集合，将常是各考察n維的，p維的，q維的测度。設$E\subseteq E^n$，用E_x表E在E^p中的投影，而用$\underset{y}{E}(x_0)$表示集合E与超平面$x=x_0$的交；令$E_x^0=\underset{x\in E_x}{\mathscr{E}}\{\operatorname{mes}\underset{y}{E}(x)>0\}$。下面常設集合$E$可测，而函数$f(x, y)$定义于$E$上且在$E$上可和。

对于每个定义于某集合 A 上的函数 φ，用$\int \varphi dA$ 表示函数在集合 A 上的勒贝格积分(如果它存在的話)。

在設集合 E 的测度有穷的补充假定之下，在“教程”中断言，下面公式成立：

$$\int f(x, y)dE=\int\left[\int f(x, y)d\underset{y}{E}(x)\right]dE_x,$$

但上写的式子并非永远有意义，因为（由簡單的例子可以看出）可测集合的投影一般說来不是可测的。事实上，上面的陈述应当是像下面的：

定理 1° 对于每个在集合 E 上可和的函数 $f(x, y)$，下面等式成立：

$$\int f(x, y)dE=\int\left[\int f(x, y)d\underset{y}{E}(x)\right]dE_x^0$$

(如此，右边的第二个积分是依“修整了”的投影而取的)。这一定理預設下面两个定理成立：

定理 2° 集合 E_x^0 是可测的。

定理 3° 对于殆遍 $x\in E_x^0$，集合 $\underset{y}{E}(x)$ 可測。

只須稍稍改变斯米尔諾夫“教程”中的推理卽可得出这两定理之証。

第三章　集合函数。絕对連續性。积分概念的推广

72. 集合的加法函数　設点函数 $f(P)$ 依非負加法正常函数 $G(\mathscr{E})$ 是可測的。作不定积分

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。\tag{1}$$

这积分对于閉体 L_G 中凡使 $f(P)$ 在其上可和的集合都有定义。如果 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}$ 上可和，則它在 $\mathscr{E}$ 的任意可測部分 $\mathscr{E}'$ 上也可和(見[53]的性質 4)，而如果 $\mathscr{E}$ 分割成有穷多或可数无穷多互无公点的集合 $\mathscr{E}_k$，那末 $\varphi(\mathscr{E})$ 等于 $\varphi(\mathscr{E}_k)$ 之和 (完全加法性)。現在，不仅就以不定积分形式給出的函数，而是就以任意形式給出的函数，来研究它的完全加法性。如此，設 T 是一个包含一切閉集合与开集合的閉的集合体，C 是由 T 中一些集合所組成的集合族，而 $\varphi(\mathscr{E})$ 对于凡屬于 C 的集合都取有穷值。同时假設，如果 $\mathscr{E}$ 屬于 C，那末所有 $\mathscr{E}$ 的部分，凡屬于 T 的，也屬于 C。此外，設 $\varphi(\mathscr{E})$ 是完全加法的，就是說，如果 C 中的集合 $\mathscr{E}$ 分割成有穷多或可数无穷多互无公点的集合 $\mathscr{E}_k$，其中 $\mathscr{E}_k$ 都屬于 T，因而也屬于 C:

$$\mathscr{E}=\sum_k \mathscr{E}_k,\tag{2}$$

那末

$$\varphi(\mathscr{E})=\sum_k \varphi(\mathscr{E}_k)。\tag{3}$$

如果有无穷多項，上面級数必然是絕对收斂的。在(1)的情形，閉体 T 是 L_G，而族 C 是由 L_G 中凡能使 $f(P)$ 在其上可和的集

合 $\mathscr{E}$ 所組成的。在下面最重要的情形中，C 是由某一屬于 L_C 的集合 $\mathscr{E}_0$ 以及凡 L_C 中含于 $\mathscr{E}_0$ 内的集合所組成者。这时 C 本身也是閉体。

注意，如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 对于屬于 T 并含于某閉区間 $\varDelta$ 的集合定义，那末这函数可以定义于 T 中一切集合 $\mathscr{E}$，因为可以利用公式

$$\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}\varDelta)。\tag{4}$$

如此它将只取有穷值，并且在整个体 T 上是完全加法的。在下面，当我們談到 $\varphi(\mathscr{E})$ 时，总是說 $\mathscr{E}\in C$。由于加法性，可知如果 $\mathscr{E}$ 是空集合，$\varphi(\mathscr{E})=0$。由加法性直接可知，如果 $\mathscr{E}'$ 及 $\mathscr{E}''$ 屬于 C，而 $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}''$，那末

$$\varphi(\mathscr{E}''-\mathscr{E}')=\varphi(\mathscr{E}'')-\varphi(\mathscr{E}')。\tag{5}$$

由于完全加法性可知，如果 $\mathscr{E}_n(n=1,2,\cdots)$ 是 C 中集合所成的單調序列，而如果其極限集合 $\mathscr{E}$ 也屬于 C，那末 $\varphi(\mathscr{E}_n)\to\varphi(\mathscr{E})$。在不縮的集合序列情形下，則 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)+(\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_2)+\cdots$，而依完全加法性，$\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}_1)+[\varphi(\mathscr{E}_2)-\varphi(\mathscr{E}_1)]+[\varphi(\mathscr{E}_3)-$ $-\varphi(\mathscr{E}_2)]+\cdots$，就是說 $\varphi(\mathscr{E}_n)\to\varphi(\mathscr{E})$。在不漲的集合序列 $\mathscr{E}_n$ 的情形中，可以同样証明，而 $\mathscr{E}$ 必然屬于 C。再注意，完全加法函数的有穷綫性組合式 $c_1\varphi_1(\mathscr{E})+c_2\varphi_2(\mathscr{E})+\cdots+c_p\varphi_p(\mathscr{E})$ 显然仍是完全加法函数。现在証明理論中的几个基本定理：

定理 1. 对于凡屬于 C 中某一集合 $\mathscr{E}_1$ 的一切集合 $\mathscr{E}$，$\varphi(\mathscr{E})$ 的值依絕对值以一个固定数为界。

用归謬法証明。如果不然，那末一定存在 $\mathscr{E}_2\subset\mathscr{E}_1$，使 $|\varphi(\mathscr{E}_2)|\geqslant2$，而 $|\varphi(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)|\geqslant2$。关于这点只須注意

$$\varphi(\mathscr{E}_1)=\varphi(\mathscr{E}_2)+\varphi(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2),$$

既然 $\varphi(\mathscr{E}_1)$ 是固定数，如果和中一項无界，另一項也必然无界。对于 $\mathscr{E}_2$ 或 $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$，定理一定不成立。設定理对于 $\mathscr{E}_2$ 不成立，所以存在 $\mathscr{E}_3\subset\mathscr{E}_2$，使 $|\varphi(\mathscr{E}_3)|\geqslant3$，而 $|\varphi(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3)|\geqslant3$，等等。我們

得到 $\mathscr{E}_1\supset\mathscr{E}_2\supset\mathscr{E}_3\cdots$，如令 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2\cdots$，依上述，必然 $\varphi(\mathscr{E}_n)\to$ $\to\varphi(\mathscr{E})$，但这不可能，因为 $\varphi(\mathscr{E}_n)$ 依絕对值无限增大，从而定理得証。

令 δ 表 $\mathscr{E}$ 的某一分割法，分 $\mathscr{E}$ 成有穷多集合 $\mathscr{E}_k$。作和

$$t_\delta=\sum_k|\varphi(\mathscr{E}_k)|\tag{6}$$

而証明对于任意 δ 所作諸 t_δ 的集合有界。設 $\mathscr{E}'_\delta$ 是满足 $\varphi(\mathscr{E}_k)\geqslant0$ 的諸 $\mathscr{E}_k$ 之和，而 $\mathscr{E}''_\delta$ 表满足 $\varphi(\mathscr{E}_k)<0$ 的諸 $\mathscr{E}_k$ 之和。注意 $\varphi(\mathscr{E})$ 的加法性，可知

$$t_\delta=\varphi(\mathscr{E}'_\delta)-\varphi(\mathscr{E}''_\delta)。\tag{7}$$

再注意 $\mathscr{E}'_\delta+\mathscr{E}''_\delta=\mathscr{E}$，所以 $\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}'_\delta)+\varphi(\mathscr{E}''_\delta)$，可以把(7)写成下式：

$$t_\delta=2\varphi(\mathscr{E}'_\delta)-\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E})-2\varphi(\mathscr{E}''_\delta)。\tag{8}$$

用 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$ 及 $\underline{\varphi}(\mathscr{E})$ 表示对于凡 $e\in\mathscr{E}$ 諸值 $\varphi(e)$ 的上确界及下确界，并且空集合也認为屬于 $\mathscr{E}$：

$$\overline{\varphi}(\mathscr{E})=\sup\varphi(e);\quad \underline{\varphi}(\mathscr{E})=\inf\varphi(e);\quad (e\in\mathscr{E})。\tag{9}$$

依定理 1 可知 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$ 与 $\underline{\varphi}(\mathscr{E})$ 都有穷。由(8)中第一式可知对于任意 δ 諸 t_δ 值是有界的：$t_\delta\leqslant2\overline{\varphi}(\mathscr{E})-\varphi(\mathscr{E})$。和 t_δ 对于一切可能分割 δ 的上确界叫做 $\varphi(\mathscr{E})$ 在集合 $\mathscr{E}$ 上的全变分。我們用 $\Phi(\mathscr{E})$ 表示它。如果 δ_n 是分割法的一序列，而 t_{δ_n} 趋向于 $\Phi(\mathscr{E})$，那末由(8)的第一式，$\varphi(\mathscr{E}'_{\delta_n})$ 趋向于 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$，而(8)中第二式既可以写成

$$2\varphi(\mathscr{E}''_{\delta_n})=\varphi(\mathscr{E})-t_{\delta_n},$$

可知 $\varphi(\mathscr{E}''_{\delta_n})\to\underline{\varphi}(\mathscr{E})$，所以取極限值时，公式(8)(用 δ_n 代替 δ)变成

$$\Phi(\mathscr{E})=2\overline{\varphi}(\mathscr{E})-\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E})-2\underline{\varphi}(\mathscr{E}),$$

由此得

$$\overline{\varphi}(\mathscr{E})=\frac{1}{2}[\Phi(\mathscr{E})+\varphi(\mathscr{E})];\quad \underline{\varphi}(\mathscr{E})=-\frac{1}{2}[\Phi(\mathscr{E})-\varphi(\mathscr{E})],$$

$$\Phi(\mathscr{E})=\overline{\varphi}(\mathscr{E})-\underline{\varphi}(\mathscr{E}),\tag{10}$$

$$\varphi(\mathscr{E})=\overline{\varphi}(\mathscr{E})+\underline{\varphi}(\mathscr{E})=\overline{\varphi}(\mathscr{E})-[-\underline{\varphi}(\mathscr{E})]。\tag{11}$$

由 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$ 与 $\underline{\varphi}(\mathscr{E})$ 的定义得知 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})\geqslant 0$，$\underline{\varphi}(\mathscr{E})\leqslant 0$。函数 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$ 及 $-\underline{\varphi}(\mathscr{E})$ 各叫做 $\varphi(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}$ 上的正負变分。

定理 2. 正負变分及全变分都是 C 上的完全加法函数。

設有一分割法，分 $\mathscr{E}$ 成部分 $\mathscr{E}_k$，而 $e_k\subset\mathscr{E}_k$，

$$e=\sum_k e_k,$$

那末

$$\varphi(e)=\sum_k\varphi(e_k)\quad(e\subset\mathscr{E})。$$

由于 e_k 是任意选择的，不难証明，

$$\overline{\varphi}(\mathscr{E})=\sum_k\overline{\varphi}(\mathscr{E}_k)。$$

同样証明負变分也是完全加法的，所以依(10)，全变分也是完全加法的。公式(11)說明凡完全加法函数是两个非負完全加法函数的差。再注意，如果在作和(6)时使用分 $\mathscr{E}$ 成无穷多部分的分割法，那末由公式(8)可以看出，仍会得出以前的上确界来。

任意点(是閉集合)屬于 T。如果 $\mathscr{E}\in C$，那末 $\mathscr{E}$ 中的任意点 P 屬于 C，从而可以談論函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 在点 P 处的数值 $\varphi(P)$。如果 $\varphi(P)\neq 0$，点 P 叫做 $\varphi(\mathscr{E})$ 的間断点。如果 $\varphi(P)>0$，那末由上面所說的定义可知 $\overline{\varphi}(P)=\varphi(P)$，而 $\underline{\varphi}(P)=0$，而如果 $\varphi(P)<0$，那末 $\overline{\varphi}(P)=0$，而 $\underline{\varphi}(P)=\varphi(P)$。$\varphi(\mathscr{E})$ 的間断点也是 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$ 及 $\underline{\varphi}(\mathscr{E})$ 的間断点。既然 $\overline{\varphi}(\mathscr{E})$ 及 $\underline{\varphi}(\mathscr{E})$ 是有穷的，凡 $\mathscr{E}$ 中滿足 $\varphi(P)\geqslant a$ 或 $\varphi(P)\leqslant -a$ 的間断点只有有穷多(a 是預定的正数)，从而 $\mathscr{E}$ 中一切間断点的数目是有穷的或是可数的。設 P_k 表这些点。如果点 P_k 的集合是可数无穷的，那末級数 $\sum_k\varphi(P_k)$ 是絕对收斂的。取定义于族 C 上的一个新集合函数：

$$\varphi_d(\mathscr{E})=\sum_{P_k\in\mathscr{E}}\varphi(P_k),\tag{12}$$

而和中包括凡与 $\mathscr{E}$ 中諸点 P_k 相应的諸項。这函数也是完全加法的。我們叫它做跃度函数。差

$$\varphi_c(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E})-\varphi_d(\mathscr{E}) \tag{13}$$

是連續的完全加法函数。

73. 特异函数 在下面将用体 L_G 来做为体 T。并非一切在 L_G 中的族 C 上的完全加法函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 都可以表成积分（1）的形式。

我們在后面証明下列基本定理，下面将引用它。

定理 凡在 C 上完全加法的函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 对于凡属于 C 中任意固定的集合 $\mathscr{E}_0$ 的集合 $\mathscr{E}$，可以表示成下列形式：

$$\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}H)+\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}), \tag{14}$$

而 H 是 $\mathscr{E}_0$ 中一个确定的集合，H 滿足 $G(H)=0$，$f(P)$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上可測并可和。

和中第一項 $\varphi(\mathscr{E}H)$ 叫做 $\varphi(\mathscr{E})$ 的特异部分。特异部分由 $\varphi(\mathscr{E})$ 在測度为零的集合上的值决定。第二項叫做絕对連續部分，在任意測度为零的集合上等于零。現在証明分成特异及絕对連續部分的方式是唯一的。設除(14)式之外对于屬于 $\mathscr{E}_0$ 的 $\mathscr{E}$ 还有下面公式成立：

$$\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}H_1)+\int_{\mathscr{E}} f_1(P)G(d\mathscr{E}),$$

而 $G(H_1)=0$。由这公式及(14)可得

$$\varphi(\mathscr{E}H)-\varphi(\mathscr{E}H_1)=\int_{\mathscr{E}} f_1(P)\,G(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。$$

把 $\mathscr{E}$ 換成屬于 $\mathscr{E}_0$ 的集合 $\mathscr{E}H+\mathscr{E}H_1$。注意 $G(\mathscr{E}H+\mathscr{E}H_1)=0$，所以在 $\mathscr{E}H+\mathscr{E}H_1$ 上的积分等于零，并且 $(\mathscr{E}H+\mathscr{E}H_1)H=\mathscr{E}H$，$(\mathscr{E}H+\mathscr{E}H_1)H_1=\mathscr{E}H_1$，于是得 $\varphi(\mathscr{E}H)=\varphi(\mathscr{E}H_1)$，由此得，絕对連續部分也必然是唯一的，就是說

$$\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} f_1(P)G(d\mathscr{E})。\tag{15}$$

証明定理时，将由一个屬于 C 的任意固定集合 $\mathscr{E}_0$ 出發，并將設一切 $\mathscr{E}$ 屬于 $\mathscr{E}_0$，如在定理中所陈述的。在分解 $\varphi(\mathscr{E})$ 成特异及絕对連續部分时我們曾从某一集合 $\mathscr{E}_0$ 出發，并設一切 $\mathscr{E}$ 屬于 $\mathscr{E}_0$。这样曾得出上述分解的唯一性。如果我們从另一个，与 $\mathscr{E}_0$ 不同的集合 $\mathscr{E}'_0$ 出發，并且 $\mathscr{E}'_0$ 也屬于 C，那末不难看出，对于凡同时屬于 $\mathscr{E}_0$ 及 $\mathscr{E}'_0$ 的集合，我們所得的分解与以前用基本集合 $\mathscr{E}_0$ 时所得者一样。事实上，在相反的情形下，必对于屬于积 $\mathscr{E}''_0=\mathscr{E}_0\mathscr{E}'_0$ 的集合(这集合也屬于族 C)，$\varphi(\mathscr{E})$ 有两个分解法，但由上面已知这不可能。

由上面的推理，直較可知，$\varphi(\mathscr{E})$ 分解成特异及絕对連續部分的方式在整个族 C 上是唯一的。

我們証明在公式(14)中积分号下出現的函数 $f(P)$ 也是完全确定的，但須与以往一样把依 $G(\mathscr{E})$ 相抵的函数等同之。須要証明，如果 (15) 对于凡屬于 $\mathscr{E}_0$ 的 $\mathscr{E}$ 成立，那末差 $\psi(P)=f_1(P)-f(P)$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上与零相抵。

設 $\mathscr{E}_0^+$ 是 $\mathscr{E}_0$ 中满足 $\psi(P)\geqslant 0$ 的諸点 P 所成的部分集合，而 $\mathscr{E}_0^-=\mathscr{E}_0-\mathscr{E}_0^+$。集合 $\mathscr{E}_0^+$ 与 $\mathscr{E}_0^-$ 也屬于 C，而在(15)中换 $\mathscr{E}$ 为 $\mathscr{E}_0^+$ 及 $\mathscr{E}_0^-$：

$$\int_{\mathscr{E}_0^+} \psi(P)G(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}_0^-} \psi(P)G(d\mathscr{E}) = 0,$$

由此可知，$\psi(P)$ 在 $\mathscr{E}_0^+$ 及 $\mathscr{E}_0^-$ 上都与零相抵，因此在 $\mathscr{E}_0$ 上也与零相抵。如果对于 C 中的两个集合 $\mathscr{E}_0$ 及 $\mathscr{E}'_0$ 各作函数 $f(P)$，那末与上面一样，在 $\mathscr{E}''_0=\mathscr{E}_0\mathscr{E}'_0$ 上这两函数相抵。我們所謂函数 $f(P)$ 的唯一性就是在这种意义之下的。如果，比如說，一切有穷区間屬于 C，那末应用上面推理法于扩張区間 $-n\leqslant x\leqslant +n$；$-n\leqslant y\leqslant +n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 之上，于是唯一地定义 $f(P)$ 于整个平面之

上。函数 $f(P)$ 通常叫做 $\varphi(\mathscr{E})$ 依 $G(\mathscr{E})$ 的导函数。設 $k_P^{(\varepsilon)}$ 表示以 P 为中心以 ε 为半徑的球(或圓)。可以証明，对于一切 P，可能除掉一个依 $G(\mathscr{E})$ 测度为零的集合之外，当 ε 趋近于零时比值 $\varphi(k_P^{(\varepsilon)}):G(k_P^{(\varepsilon)})$ 趋近于一个依 $G(\mathscr{E})$ 与 $f(P)$ 相抵的函数。此时可設对于足够小的 ε 值 $\varphi(\mathscr{E})$ 定义于整个球 $k_P^{(\varepsilon)}$ 之上。下面我們用不着这定理，所以也不去証明它。

定义 函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 叫做依 $G(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，是指对于 C 中任意固定的 $\mathscr{E}_0$ 及任意預定的正数 ε，必有一正数 η 存在，使当 $e\in\mathscr{E}_0$ 而 $|G(e)|\leqslant\eta$ 时，$|\varphi(e)|\leqslant\varepsilon$。如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 依 $G(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，那末显然 $\varphi(\mathscr{E})=0$ 对于凡滿足 $\mathscr{E}\in C$ 及 $G(\mathscr{E})=0$ 的 $\mathscr{E}$ 成立。(14)中第二项是 C 上一个絕对連續函数，这在上面已得知了。反之，如果知道 $\varphi(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，那末 $\varphi(\mathscr{E}H)=0$，因为 $G(\mathscr{E}H)=0$，而 $\varphi(\mathscr{E})$ 可以表示成

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}), \tag{16}$$

这就是說，特异部分沒有了。由于这推理法，可得下面基本定理的系：

系 如果当 $G(\mathscr{E})=0$ 时 $\varphi(\mathscr{E})=0$，那末 $\varphi(\mathscr{E})$ 可由公式(16)表示，并且在 C 中一切集合 $\mathscr{E}_0$ 上都是依 $G(\mathscr{E})$ 絕对連續的函数。

注意，如果 $G(\mathscr{E})$ 不連續，那末由公式(16)定义的 $\varphi(\mathscr{E})$ 一般說来也不是連續的。例如設 $G(P_0)=a\neq 0$，那末 $\varphi(P_0)=$ $=af(P_0)$。但 $\varphi(\mathscr{E})$ 依上述的意义是依 $G(\mathscr{E})$ 絕对連續的。

在 $G(\mathscr{E})$ 連續的情形中，依公式(16)定义的 $\varphi(\mathscr{E})$ 显然是連續的。如果 $G(\Delta)$ 是区間 Δ 的面积，所以 L_G 是依勒貝格可測的集合所成的体，公式(14)取得下面形式：

$$\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}H)+\iint_{\mathscr{E}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

而 H 有等于零的勒貝格測度。公式(16)成为下面形式：

$$\varphi(\mathscr{E})=\iint_{\mathscr{E}} f(x, y)dx\,dy,$$

而在这情形下显然 $\varphi(\mathscr{E})$ 在每点处是連續的。在公式(16)的情形下，对于屬于集合 $\mathscr{E}$ 的集合 e，为了得函数 $\varphi(e)$ 值的上确界，显然只須在使 $f(P)\geqslant 0$ 的集合上积分 $f(P)$，而如果在使 $f(P)\leqslant 0$ 的集合上积分 $f(P)$，則得下确界。如此对于由公式 (16) 定义的函数 $\varphi(\mathscr{E})$，可得下面的公式，分别表示其正、負变分及全变分：

$$\bar{\varphi}(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f^{+}(P)G(d\mathscr{E});\quad \underline{\varphi}(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f^{-}(P)G(d\mathscr{E});$$
$$\Phi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}|f(P)|G(d\mathscr{E})。\tag{17}$$

如果由函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 减去跃度函数 $\varphi_d(\mathscr{E})$，并对于余下的連續函数引用公式(14)的分解，那末可以把 $\varphi(\mathscr{E})$ 分解成三項：

$$\varphi(\mathscr{E})=\varphi_d(\mathscr{E})+\varphi_c(\mathscr{E}H)+\int_{\mathscr{E}} f_c(P)G(d\mathscr{E})。\tag{18}$$

74. 一个变数的情形　在这情形中自然可以取不减点函数 $g(x)$ 来替代 $G(\mathscr{E})$。固定某有穷实数 a，可以作点函数 $\omega(x)=$ $=\varphi([a, x])$，而对于它公式(14)取得下面形式：

$$\omega(x)=\varphi([a, x]\cdot H)+\int_{[a,x]} f(x)dg(x),\tag{19}$$

而对于勒貝格积分：

$$\omega(x)=\varphi([a, x]\cdot H)+\int_a^x f(x)dx。\tag{20}$$

在絕对連續的情形下，可得公式

$$\omega(x)=\int_{[a,x]} f(x)dg(x)\quad 或\quad \omega(x)=\int_a^x f(x)dx。\tag{21}$$

我們限于考察有穷区間 $[a,b]$，并較詳細地考察勒貝格积分的情形：

$$\omega(x)=\int_a^x f(x)dx+\omega(a), \tag{22}$$

而 $f(x)$ 是可测函数，并在 $[a, b]$ 上可积。注意 $f(x)$ 的积分的絕对連續性，对于函数 (22) 可得下面性質：对于任意預定的正数 ε，必有一正数 η 与它相应，使如果 (a_k, b_k) $(k=1, 2, \cdots, n)$ 是互不相交的区間，并且

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leqslant\eta \tag{23}$$

时，那末

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[\omega(b_k)-\omega(a_k)]\right|\leqslant\varepsilon。 \tag{24}$$

我們將从点函数出發，而我們說定义于区間 $[a, b]$ 上的点函数 $\omega(x)$ 是在这区間上絕对連續的，是指它具有上述的性質。特別取 $n=1$，可知絕对連續函数也是連續函数。在下面將看出，存在單調連續点函数，并不是絕对連續的。由上述的性質可得下面性質：对于任意預定正数 ε 必有一正数 η 与它相应，使当(23)滿足时

$$\sum_{k=1}^{n}|\omega(b_k)-\omega(a_k)|\leqslant\varepsilon。 \tag{25}$$

事实上，如果 $\omega(x)$ 有上述的性質(24)，就是說絕对連續的，那末对于預定的 ε，必有 η 与之相应，使当(23)滿足时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[\omega(b_k)-\omega(a_k)]\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}。 \tag{26}$$

对于任意一組滿足(23)的区間 (a_k, b_k)，我們分它們成两类，第 I 类中的区間是滿足 $\omega(b_k)-\omega(a_k)\geqslant 0$ 的，第 II 类是滿足 $\omega(b_k)-\omega(a_k)<0$ 的。依(26)可得

$$\sum_{\mathrm{I}}|\omega(b_k)-\omega(a_k)|=\sum_{\mathrm{I}}[\omega(b_k)-\omega(a_k)]\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{\mathrm{II}}|\omega(b_k)-\omega(a_k)|=\left|\sum_{\mathrm{II}}[\omega(b_k)-\omega(a_k)]\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

由此可得(25)。注意(25)和中諸項是非負的，而 n 是任意的，于是

对于絕对連續函数可得下面性質：对于任意預定的正数 ε 必有一个正数 η 与它相应，使当 (a_k, b_k) 是有穷多或可数无穷多互不相交的区間并滿足条件

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \eta \tag{27}$$

时，

$$\sum_k |\omega(b_k) - \omega(a_k)| \leqslant \varepsilon。 \tag{28}$$

反之，如果这条件滿足，那末原来的条件(24)更滿足，而 $\omega(x)$ 是絕对連續的。

定理 1. 两个絕对連續函数的和、差、积都仍是絕对連續函数。两个絕对連續函数之商当分母不等于零时也仍是絕对連續的。

我們只証明积的絕对連續性。設函数 $\omega_1(x)$ 及 $\omega_2(x)$ 是絕对連續的，則它們在 $[a, b]$ 中是有界的，就是說 $|\omega_1(x)| \leqslant l_1$，而 $|\omega_2(x)| \leqslant l_2$。那末

$$\begin{aligned}&|\omega_1(b_k)\omega_2(b_k) - \omega_1(a_k)\omega_2(a_k)| \leqslant \\ &\quad \leqslant |\omega_2(b_k)||\omega_1(b_k) - \omega_1(a_k)| + |\omega_1(a_k)||\omega_2(b_k) - \omega_2(a_k)| \leqslant \\ &\quad \leqslant l_2|\omega_1(b_k) - \omega_1(a_k)| + l_1|\omega_2(b_k) - \omega_2(a_k)|。\end{aligned}$$

就諸 k 取和，并注意 $\omega_1(x)$ 及 $\omega_2(x)$ 的絕对連續性，可知积 $\omega_1(x)\omega_2(x)$ 具有性質(25)。

定理 2. 絕对連續函数 $\omega(x)$ 是囿变函数，而其全变分 $v(x)$ 也是絕对連續的函数。

設 η_0 是一正数，使当在条件(23)中令 $\eta = \eta_0$ 时，則

$$\sum_k |\omega(b_k) - \omega(a_k)| \leqslant 1。 \tag{29}$$

分解 $[a, b]$ 成部分，設其分点为 $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{N-1} < c_N = b_1$，并且令 $c_k - c_{k-1} \leqslant \eta_0$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$。对于区間 $[c_{k-1}, c_k]$ 的任意分割，不等式(29)都成立，所以在每一区間 $[c_{k-1}, c_k]$ 之上 $\omega(x)$

的和 l_δ 及全变分都不大于 1，从而在整个区間 $[a, b]$ 上不大于 N。設在(23)与(25)中两相应的正数是 η 与 ε。我們將把每个出現于条件(23)中的区間 $[a_k, b_k]$ 分成部分区間。所得諸区間長之和仍满足条件(23)，而相应于所得諸部分区間的和(25)仍是 $\leqslant \varepsilon$。与 $[a_k, b_k]$ 的諸部分区間相应諸項之和的上确界显然是 $v(b_k)-v(a_k)$，如此当条件(23)满足时，

$$\sum_{k=1}^{n} |v(b_k)-v(a_k)| \leqslant \varepsilon,$$

由此可知 $v(x)$ 是絕对連續的，而定理証明了。

作函数

$$\omega_1(x)=\frac{1}{2}[v(x)+\omega(x)]; \quad \omega_2(x)=\frac{1}{2}[v(x)-\omega(x)], \quad (30)$$

这两函数都是不减的[8]，并且是絕对連續的，这由定理 1 可得知。我們把 $\omega(x)$ 表示成两个不减絕对連續函数之差的形式：

$$\omega(x)=\omega_1(x)-\omega_2(x)。 \quad (31)$$

上面曾指出，可和函数 $f(x)$ 的不定积分(22)是依上面所述定义(23)，(24)或(23)，(25)的意义下絕对連續的点函数 $\omega(x)$。現在証明逆定理：

定理 3. 凡絕对連續的函数 $\omega(x)$ 可以由不定积分表示：

$$\omega(x)=\int_a^x f(x)dx+\omega(a)。 \quad (32)$$

引用函数 $\omega_1(x)$，并当 $x<a$ 时設 $\omega_1(x)=\omega_1(a)$，而当 $x>b$ 时設 $\omega_1(x)=\omega_1(b)$，可以使每一区間 $\varDelta[\alpha, \beta]$ 有一非負数 $\varphi_1(\varDelta)=\omega_1(\beta)-\omega_1(\alpha)$ 与它相应，而既然 $\omega_1(x)$ 是連續的，$\varDelta$ 是閉的还是开的都无关紧要。如果某一个一維集合 $\mathscr{E}$ 依勒貝格可测，那末必存在一包含 $\mathscr{E}$ 的开集合 O，而集合 $O-\mathscr{E}$ 可以为有穷多或可数无穷多区間 $[a_k, b_k]$ 复盖，并且这些区間長之和是任意小的。既然 $\omega_1(x)$ 在 $[a, b]$ 中是絕对連續的，而其在 $[a, b]$ 外的延續是常数，我

們可以选取这复盖，使諸非負項 $\omega_1(b_k)-\omega_1(a_k)$ 之和是任意小的（$[a_k, b_k]$ 表諸复盖区間），这就是說，如果 $\mathscr{E}$ 依勒貝格是可測的，那末 $\mathscr{E}$ 依 $\omega_1(x)$ 也是可測的。如此可以扩展 $\varphi_1(\Delta)$ 到 L 中一切屬于 $[a, b]$ 的集合上去，并且保持完全加法性。由上面的推理可知，如果勒貝格測度 $m(\mathscr{E})=0$，那末 $\varphi_1(\mathscr{E})=0$，因此

$$\varphi_1(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f_1(x)\,dx。\tag{33}$$

同样，作 $\varphi_2(\Delta)=\omega_2(\beta)-\omega_2(\alpha)$，可得

$$\varphi_2(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f_2(x)\,dx,\tag{34}$$

而 $f_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可和的，所以

$$\begin{aligned}\varphi(\mathscr{E})=\varphi_1(\mathscr{E})-\varphi_2(\mathscr{E})&=\int_{\mathscr{E}}[f_1(x)-f_2(x)]\,dx=\\&=\int_{\mathscr{E}} f(x)\,dx。\end{aligned}\tag{35}$$

如果以区間 $[a, x]$ 代替集合 $\mathscr{E}$，則得公式(22)。

我們可以斷定，出現于公式 (22) 的函数 $f(x)$ 除却一个殆遍等于零的加数外是唯一决定的。事实上，如果除 (22) 以外，对于 $\omega(x)$ 还有另一如此的公式，其积分号下的函数是 $g(x)$，那末差 $f(x)-g(x)$ 的积分对于凡屬于 $[a, b]$ 的区間都是零，而依 [53] 的性質 11，可知上述的差与零相抵。出現于公式 (22) 的函数 $f(x)$ 叫做 $\omega(x)$ 的导函数，平常用下面的記号表示：$f(x)=\omega'(x)$。我們不詳細討論，但可以証明，对于 $[a, b]$ 中的一切 x，除一个勒貝格測度为零的集合之外，下面極限关系成立：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(x+h)-\omega(x)}{h}=F(x),$$

其中 $F(x)$ 与 $f(x)$ 相抵①。如果 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 中的連續函数，那末对于 $[a, b]$ 中的一切 x，必存在积分依上限的通常导数 $\omega'(x)=$

① 譯者注：参照那湯松著作第九章。

$=f(x)$。如果 $f(x)$ 不仅是連續的，而是絕对連續的，那末显然

$$\omega'(x)=f(x)=\int_a^x h(x)dx+C,$$

而 $h(x)$ 是可和的。这时 $f'(x)=h(x)$，而 $h(x)$ 叫做 $\omega(x)$ 的二阶导函数，并用通常的記号 $h(x)=\omega''(x)$ 表示。同样 $\omega(x)$ 可以有 k 阶的絕对連續导函数，于是必有可和的 $k+1$ 阶导函数。如此它可以表示成下面的形式：

$$\omega(x)=\int_a^x dx\int_a^x dx\cdots\int_a^x \omega^{(k+1)}(x)dx+\omega(a)+$$

$$+\frac{\omega'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{\omega^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k。$$

上面所討論的全部理論可以推广到 $\omega(x)$ 对于不减函数 $g(x)$ 是絕对連續的情形，其中 $g(x)$ 假設是連續的；就是說对于任意預定的正数 ε，必存在一正数 η，使当 (a_k, b_k) 是互不相交的区間，且

$$\sum_{k=1}^n [g(b_k)-g(a_k)]\leqslant\eta \tag{36}$$

时，必然

$$\left|\sum_{k=1}^n [\omega(b_k)-\omega(a_k)]\right|\leqslant\varepsilon。 \tag{37}$$

与上面完全一样，可以把(37)換成(28)，而函数 $\omega(x)$ 是在 $[a,b]$ 上連續的。这时(32)須要換成

$$\omega(x)=\int_a^x f(x)dg(x)+\omega(a)。 \tag{38}$$

75. 絕对連續的集合函数 現在回到平面集合的一般情形，而更詳細地討論公式(16)所作的变換，并將設 $f(P)$ 在全平面上非負并可和。如果 $f(P)$ 定义于某可测集合 $\mathscr{E}_0$ 上，并在其上可和，那末令这函数在 $\mathscr{E}_0$ 以外等于零，于是得出一个在全平面上可和的函数。公式(16)定义出在体 L_G 上完全加法的函数 $\varphi(\mathscr{E})$。所以这函数必定义于一切半开区間上，因而又可以把这区間函数 $\varphi(\varDelta)$

推广到体 L_φ 上去，与以前关于 $G(\Delta)$ 所做的一样。

定理 1. 凡 L_G 中的集合 $\mathscr{E}$ 必屬于 L_φ，而公式(16)定出这集合的測度 $\varphi(\mathscr{E})$，后者是依上述推广 $\varphi(\Delta)$ 而得的。

凡开集合 O 是可数无穷多彼此无公点的半开区間 Δ_k $(k=1, 2, \cdots)$ 之和。把諸公式

$$\varphi(\Delta_k)=\int_{\Delta_k} f(P)G(d\mathscr{E})$$

依 k 取和，由于測度的完全加法性，左边的和是測度 $\varphi(O)$，而右边是在 O 上的积分值，因为积分也是完全加法的，就是說，公式(16)定出任意开集合的測度 $\varphi(O)$ 来。注意凡閉集合 F 是全平面 $\mathscr{E}'$(开集合)与某一开集合 O（卽差 $O=\mathscr{E}'-F$）之差，而

$$\varphi(\mathscr{E}')=\int_{\mathscr{E}'} f(P)G(d\mathscr{E});\quad \varphi(O)=\int_O f(P)G(d\mathscr{E}),$$

于是可得，公式(16)定出任意閉集合 F 的測度 $\varphi(F)$ 来。公式(16)定出任意开集合 $\mathscr{E}=O-F$ 的測度，此处 $F\subset O$。設 $\mathscr{E}$ 是 L_G 中某一集合，ε_n 是趋向于零的正数序列。我們知道，必存在开集合 O_n 及閉集合 F_n 两序列，滿足 $F_n\subset\mathscr{E}_n\subset O_n$，而 $G(O_n-F_n)=G(O_n)-$ $-G(F_n)\leqslant\varepsilon_n$。依积分(16)的絕对連續性，$\varphi(O_n-F_n)\to 0$，所以 $\mathscr{E}$ 也屬于 L_φ[38]。这时 $\mathscr{E}$ 在 L_φ 中的測度显然是 $\varphi(F_n)$ 或 $\varphi(O_n)$ 的極限，也就是

$$\int_{F_n} f(P)G(d\mathscr{E})$$

的極限，其中 $F_n\subset\mathscr{E}$，$G(\mathscr{E}-F_n)\to 0$。依积分的絕对連續性，这积分正是依 $\mathscr{E}$ 取的积分，就是說 $\mathscr{E}$ 在 L_φ 中的測度正是积分(16)，于是定理証明了。如果設非負函数 $f(P)$ 只在任意一个有界集合上面可和，定理仍旧正确，証明法也与上面本質上相同。在下面定理中我們更精确地討論 L_φ。

定理 2. 任意集合 $\mathscr{E}$ 屬于 L_φ 的必要且充分的条件乃是它可

以表示成和

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}^{(1)}+\mathscr{E}^{(2)}, \tag{39}$$

其中 $\mathscr{E}^{(1)}\in L_G$，而在 $\mathscr{E}^{(2)}$ 的諸点 P 处 $f(P)=0$。

先証必要性。設 $\mathscr{E}$ 屬于 L_{φ}。作集合

$$\mathscr{E}_0=\mathscr{E}[f(P)=0]; \quad \mathscr{E}_1=\mathscr{E}[f(P)>1];$$

$$\mathscr{E}_n=\mathscr{E}\left[\frac{1}{n}<f(P)\leqslant\frac{1}{n-1}\right] \tag{40}$$

$$(n=2,3,\cdots)$$

而用 $\mathscr{E}'$ 表示凡使 $f(P)$ 无意义或等于 $+\infty$ 的諸点 P 所組成的集合。集合 $\mathscr{E}'$ 依 $G(\mathscr{E})$ 是可測的，并且 $G(\mathscr{E}')=0$。在 $\mathscr{E}'$ 的任意部分上这些話仍然成立。函数 $f(P)$ 既然依 $G(\mathscr{E})$ 是可測的，它对于 $\varphi(\mathscr{E})$ 也是可測的，而所有集合 (40) 与 $\mathscr{E}'$ 都屬于 L_{φ}。再定义集合

$$\mathscr{E}^{(1)}=\mathscr{E}\mathscr{E}'+\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}\mathscr{E}_n; \quad \mathscr{E}^{(2)}=\mathscr{E}\mathscr{E}_0。 \tag{41}$$

如此公式(39)成立。在 $\mathscr{E}^{(2)}$ 的点处 $f(P)$ 等于零，我們还須証明 $\mathscr{E}^{(1)}\in L_G$。集合 $\mathscr{E}\mathscr{E}'$ 依 $G(\mathscr{E})$ 的測度是零，所以只須証集合 $\mathscr{E}\mathscr{E}_n$ 依 $G(\mathscr{E})$ 可測。既然 $\mathscr{E}\mathscr{E}_n$ 依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測，必存在閉集合 F_n 及开集合 O_n，使

$$F_n\subset\mathscr{E}\mathscr{E}_n\subset O_n, \quad \varphi(O_n-F_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{n}, \tag{42}$$

其中 ε 是一个預定的正数。作集合

$$D_n=\mathscr{E}_n(O_n-F_n)=\mathscr{E}_nO_n-\mathscr{E}_nF_n, \tag{43}$$

就是說 D_n 是凡 O_n-F_n 中滿足 $\frac{1}{n}<f(P)\leqslant\frac{1}{n-1}$ 或 $f(P)>1$ ($n=1$ 时) 的諸点所成集合。既然 $O_n-F_n\in L_G$，而 $f(P)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 可測，集合 D_n 屬于 L_G。又因为 $F_n\subset\mathscr{E}\mathscr{E}_n$，可知 $F_n\subset\mathscr{E}_n$ 而 $\mathscr{E}_nF_n=F_n$。由 $\mathscr{E}\mathscr{E}_n\subset O_n$ 可知 $\mathscr{E}\mathscr{E}_n\subset O_n\mathscr{E}_n$，而依(43)，$\mathscr{E}\mathscr{E}_n-F_n\subset D_n$，

因此 $|\mathscr{E}\mathscr{E}_n - F_n|_G \leqslant |D_n|_G$。但集合 $D_n \in L_G$，所以可以写 $|D_n|_G = G(D_n)$，就是説

$$|\mathscr{E}\mathscr{E}_n - F_n|_G \leqslant G(D_n)。\qquad (44)$$

又由(43)及 $\mathscr{E}_n F_n = F_n$ 可知 $D_n \subset O_n - F_n$，而应用(42)可得

$$\int_{D_n} f(P) G(d\mathscr{E}) = \varphi(D_n) \leqslant \varphi(O_n - F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}。\qquad (45)$$

集合 D_n 依(43)是在 $\mathscr{E}_n$ 中的，而在 $\mathscr{E}_n$ 上 $f(P) > \frac{1}{n}$。如此得

$$\int_{D_n} f(P) G(d\mathscr{E}) \geqslant \frac{1}{n} G(D_n),$$

而不等式(45)变成不等式：

$$\frac{G(D_n)}{n} < \frac{\varepsilon}{n},$$

就是說 $G(D_n) < \varepsilon$。依 (44) 可知 $|\mathscr{E}\mathscr{E}_n - F_n|_G < \varepsilon$，既然 ε 是任意的，由此可知 $\mathscr{E}\mathscr{E}_n \in L_G$；条件(39)的必要性証明了。

再証明充分性。已知公式 (39)，其中 $\mathscr{E}^{(1)} \in L_G$，而 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}^{(2)}$ 的点处 $=0$。須要証明 $\mathscr{E} \in L_\varphi$。依定理 1，集合 $\mathscr{E}^{(1)} \in L_\varphi$。剩下只要証明 $\mathscr{E}^{(2)} \in L_\varphi$ 就够了。凡滿足 $f(P) = 0$ 的点所成的集合 H 是依 $G(\mathscr{E})$ 可测的，因此 $H \in L_\varphi$，而依 (16)，$\varphi(H) = 0$。但 $\mathscr{E}^{(2)} \subset H$，因此 $\mathscr{E}^{(2)}$ 依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測，而其測度等于零。如此定理証明了。注意 $\mathscr{E}^{(2)} \subset H$，因之 $\varphi(\mathscr{E}^{(2)}) = 0$，所以可以結論，$\varphi(\mathscr{E}) = \varphi(\mathscr{E}^{(1)})$，就是說在計算 $\varphi(\mathscr{E})$ 时可以应用公式 (16)，但須把 $\mathscr{E}$ 換成 $\mathscr{E}^{(1)}$。再注意公式 (39) 的集合 $\mathscr{E}^{(1)}$ 中凡滿足 $f(P) = 0$ 的点可以归并到 $\mathscr{E}^{(2)}$ 中去。这些点的集合 $\mathscr{E}^{(1)}\mathscr{E}_0$ 也依 $G(\mathscr{E})$ 是可測的。

現在証明一个定理，使我們能够把依 $\varphi(\mathscr{E})$ 作的勒貝格-斯提勒杰斯积分化成依 $G(\mathscr{E})$ 的积分。

定理 3. 如果 $F(P)$ 定义于某集合 $\mathscr{E}$ 上，并在其上依 $\varphi(\mathscr{E})$

可測并可和，而 $\mathscr{E}$ 是依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測的，并且測度有穷，那末 $F(P)f(P)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}^{(1)}$ 上可測，而下面公式成立：

$$\int_{\mathscr{E}} F(P)\varphi(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}^{(1)}} F(P)f(P)G(d\mathscr{E}), \tag{46}$$

这可以写成下面形式：

$$\int_{\mathscr{E}} F(P)\left[\int_{d\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})\right]=\int_{\mathscr{E}^{(1)}} F(P)f(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{46_1}$$

延展 $F(P)$，使它在 $\mathscr{E}$ 之外为零，可以設 $F(P)$ 与 $f(P)$ 一样都到处有定义。此外可以設 $F(P)$ 与 $f(P)$ 在一切点处都取有穷值。函数 $F(P)$ 依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測；而 $f(P)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 可測，所以依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測。取新函数 $F_0(P)$，令当 $f(P)\neq 0$ 时 $F_0(P)=F(P)$，当 $f(P)=0$ 时 $F_0(P)=0$。换言之，$F_0(P)=F(P)\omega_H(P)$，而 $\omega_H(P)$ 是凡滿足 $f(P)\neq 0$ 諸点 P 所成集合 H 的特征函数。我們既知 $H\in L_G$，所以 $H\in L_\varphi$，就是說 $F(P)$ 与 $\omega_H(P)$ 都是依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測的，因此 $F_0(P)$ 依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測。今証明 $F_0(P)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 可測。既然 $F_0(P)$ 依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測，对于任意 a，凡滿足 $F_0(P)>a$ 的諸点所成的集合 $\mathscr{E}_a$ 可以表成下列形式：$\mathscr{E}_a=\mathscr{E}_a^{(1)}+\mathscr{E}_a^{(2)}$，而 $\mathscr{E}_a^{(1)}\in L_G$，在 $\mathscr{E}_a^{(2)}$ 上 $f(P)=0$。如果 $a\geqslant 0$，依 $F_0(P)$ 的定义，集合 $\mathscr{E}_a^{(2)}$ 化为烏有，所以 $\mathscr{E}_a\in L_G$。如果 $a<0$，那末集合 $\mathscr{E}_a$ 包含整个集合 H，而如上所述，可設在这情形下 $\mathscr{E}_a^{(2)}$ 与 H 重合，就是在 $\mathscr{E}_a^{(1)}$ 的一切点处 $f(P)>0$。但 $H\in L_G$，因此 $\mathscr{E}_a=\mathscr{E}_a^{(1)}+H\in L_G$。如此 $\mathscr{E}_a\in L_G$ 对于一切 a 都成立，因此 $F_0(P)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 是可測的，而积 $F_0(P)f(P)$ 也是依 $G(\mathscr{E})$ 可測的。回到在定理中所說的集合 $\mathscr{E}^{(1)}$。在这集合的点处积 $F_0(P)f(P)$ 与 $F(P)f(P)$ 重合，就是說 $F(P)f(P)$ 在 $\mathscr{E}^{(1)}$ 中依 $G(\mathscr{E})$ 是可測的。在証明公式 (46) 时将限于考察 $F(P)$ 有界的情形。对于无界函数証明也完全一样。設 $|F(P)|<$ $<L$，而 $\mathscr{E}_{n,k}$ 表 $\mathscr{E}$ 中凡滿足不等式

$$\frac{k}{2^n}L < F(P) \leqq \frac{k+1}{2^n}L$$

$$(k = -2^n, -2^n+1, \cdots, 2^n-1)$$

諸点 P 所成的集合。作片段定值的函数

$$F_n(P) = \frac{k}{2^n}L \quad 如果 P \in \mathscr{E}_{n,k}。$$

当 n 增大时函数序列 $F_n(P)$ 增大而有界，其絕对值以 L 为界。于是

$$\int_{\mathscr{E}} F_n(P)\varphi(d\mathscr{E}) = \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} L\varphi(\mathscr{E}_{n,k}) =$$

$$= \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} L \int_{\mathscr{E}_{n,k}^{(1)}} f(P)G(d\mathscr{E}),$$

而 $\mathscr{E}_{n,k}^{(1)}$ 是 $\mathscr{E}_{n,k}$ 依(39)式分解而得者。依上述一切 k 值求和，可得集合 $\mathscr{E}^{(1)}$，而把常数 $\frac{k}{2^n}L$ 放入积分号下，可得公式

$$\int_{\mathscr{E}} F_n(P)\varphi(d\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}^{(1)}} F_n(P)f(P)G(d\mathscr{E})。$$

右边积分号下函数依絕对值不大于可和函数 $Lf(P)$，而两边可以在积分号下取極限值，于是得公式(46)。如果集合 $\mathscr{E}$ 依 $G(\mathscr{E})$ 可测，那末在公式(46)中可以用 $\mathscr{E}$ 代替 $\mathscr{E}^{(1)}$，因为 $\mathscr{E}^{(2)} = \mathscr{E} - \mathscr{E}^{(1)}$，而 $f(P)$ 在 $\mathscr{E}^{(2)}$ 上 $=0$，所以在 $\mathscr{E}^{(2)}$ 上的积分等于零。

如果 $G(\varDelta)$ 是囿变函数，那末应用分解成两个非負函数之差的典式，可得

$$G(\mathscr{E}) = G_1(\mathscr{E}) - G_2(\mathscr{E}),$$

而把定理应用到 $G_1(\mathscr{E})$ 及 $G_2(\mathscr{E})$ 上去。在这情形下須用 L_V 代替 L_G，而 $V(\mathscr{E}) = G_1(\mathscr{E}) + G_2(\mathscr{E})$。关于函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 也有分解成两个非負函数之差的表示式 $\varphi(\varDelta) = \varphi_1(\varDelta) - \varphi_2(\varDelta)$，而 L_φ 須換成 L_{V_1}，$V_1(\varDelta) = \varphi_1(\varDelta) + \varphi_2(\varDelta)$。完全同样地可以考察 $f(P)$ 变号的情形。此时必須把 $f(P)$ 表成正負部分的差[53]：

$$f(P)=f^+(P)-f^-(P),$$

而証明定理时可以分别对各項进行。如此 $\varphi(\Delta)$ 表示成两个非負函数之差，而集合体 L_φ 須換成依函数

$$\psi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}|f(P)|G(d\mathscr{E})$$

可測集合的体。这定理可以完全同样地推广到复函数 $f(P)$ 与 $G(\mathscr{E})$ 的情形上去。

再考察上面所証定理在一个变数情形下的形式。設 $g(x)$ 是軸 X 上(或在有穷区間上)不减并有界的函数，而 $f(x)$ 是依 $g(x)$ 在全軸上非負且可和的。考察函数

$$\omega(x)=\int_{[a,x]}f(x)dg(x),$$

而 a 是任意固定数。凡依 $g(x)$ 可測的函数依 $\omega(x)$ 也是可測的，而集合 $\mathscr{E}$ 依 $\omega(x)$ 可測的必要且充分的条件乃是它可以表示成(39)的形式，其中 $\mathscr{E}^{(1)}$ 依 $g(x)$ 可測，而 $f(x)$ 在凡 $\mathscr{E}^{(2)}$ 的点处等于0。如果 $F(x)$ 依 $\omega(x)$ 在集合 $\mathscr{E}$ 上可和，而 $\mathscr{E}$ 依 $\omega(x)$ 可測，那末下面公式成立：

$$\int_{\mathscr{E}}F(x)d\left[\int_{[a,x]}f(x)\,dg(x)\right]=$$

$$=\int_{\mathscr{E}^{(1)}}F(x)f(x)dg(x), \tag{47}$$

而 $\mathscr{E}^{(1)}$ 是出現于公式(39)中的 $\mathscr{E}$ 的部分。如果 $F(x)$ 在 $\mathscr{E}$ 上依 $g(x)$ 可測，那末 $\mathscr{E}^{(1)}$ 可以換成 $\mathscr{E}$。在 $g(x)=x$ 的情形，可得公式

$$\int_{\mathscr{E}}F(x)d\left[\int_a^x f(x)\,dx\right]=\int_{\mathscr{E}^{(1)}}F(x)f(x)dx。\tag{48}$$

如此，如果 $\omega(x)$ 沒有特异部分，那末 $F(x)$ 依 $\omega(x)$ 的勒貝格-斯提勒杰斯积分可以用勒貝格积分表示出来。如果 $\mathscr{E}$ 是某一区間 $[a,b]$，那末公式(47)及(48)可以表示成下面形式：

$$\int_{[a,b]}F(x)d\left[\int_{[a,x]}f(x)dg(x)\right]=\int_{[a,b]}F(x)f(x)dg(x), \tag{49}$$

$$\int_a^b F(x)d\left[\int_a^x f(x)dx\right]=\int_a^b F(x)f(x)dx, \qquad (49_1)$$

其中(例如在第二式中)假設 $F(x)$ 是依 $f(x)$ 的不定积分可和的。設 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 是絕对連續函数，就是說

$$\Phi(x)=\int_a^x \Phi'(x)dx+C_1;\quad \Psi(x)=\int_a^x \Psi'(x)dx+C_2, \qquad (50)$$

而 $\Phi'(x)$ 及 $\Psi'(x)$ 在 $[a, b]$ 都是可和的。应用公式 (49_1) 可得：

$$\int_a^b \Phi(x)\Psi'(x)dx+\int_a^b \Psi(x)\Phi'(x)dx=$$
$$=\int_a^b \Phi(x)d\Psi(x)+\int_a^b \Psi(x)d\Phi(x),$$

而在右边的积分都是通常斯提勒杰斯积分，因为 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 是連續且囿变的。关于右边有公式[2]

$$\int_a^b \Phi(x)d\Psi(x)+\int_a^b \Psi(x)d\Phi(x)=[\Phi(x)\Psi(x)]_{x=a}^{x=b}$$

成立，而代入上面公式中可得分部积分公式：

$$\int_a^b \Phi(x)\Psi'(x)dx+\int_a^b \Psi(x)\Phi'(x)dx=[\Phi(x)\Psi(x)]_{x=a}^{x=b}。 \qquad (51)$$

由(50)直接可知，对于和 $\Phi(x)+\Psi(x)$ 积分号下函数等于 $\Phi'(x)+$ $+\Psi'(x)$，就是說 $[\Phi(x)+\Psi(x)]'=\Phi'(x)+\Psi'(x)$。在(51)中令 b 等于 x，可得

$$\Phi(x)\Psi(x)=\int_a^x [\Phi(x)\Psi'(x)+\Psi(x)\Phi'(x)]dx+$$
$$+\Phi(a)\Psi(a),$$

就是說 $[\Phi(x)\Psi(x)]'=\Phi(x)\Psi'(x)+\Psi(x)\Phi'(x)$。

76. 例 我們举一个不减連續函数而并非絕对連續函数的例，并且对于这函数公式(20)中的第二項(即絕对連續項)消失。首先在区間[0, 1]上作一閉集合 F_0。分区間[0, 1]成三等分，設其分点为

$\frac{1}{3}$ 及 $\frac{2}{3}$，并取去中間的开区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$。再把所余两区間 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 及 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 各分成三等分，第一个的分点是 $\frac{1}{9}$ 及 $\frac{2}{9}$，而第二个的分点是 $\frac{7}{9}$ 与 $\frac{8}{9}$。从这两个区間中各取去中間部分，就是說取去区間 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 及 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$。把所余四个区間

$$\left[0, \frac{1}{9}\right]; \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]; \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]; \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

再各分成三等分，并从每个区間中各取去当中那部分开区間，余类推。如此最后由区間 $[0, 1]$ 取去可数无穷多个开間区，这些开区間彼此无公点也无公端点：

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right),$$
$$\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \cdots, \tag{52}$$

也就是說，取去某一开集合 H_0，而所余集合是閉的，用 F_0 表示。第一步取去的开区間長等于 $\frac{1}{3}$，第二步取去两个区間，其長各为 $\frac{1}{3^2}$，第三步取去 2^2 个区間，其長各是 $\frac{1}{3^3}$，而一般地說，第 n 步取去 2^{n-1} 个区間，其長各为 $\frac{1}{3^n}$。如此，开集合 H_0 的勒貝格測度等于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

因而在区間 $[0, 1]$ 上所余的集合 F_0 的测度必等于零。現在在区間 $[0, 1]$ 上定义函数 $f(x)$ 如下。設

$$\text{当 } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ 时} \quad f(x) = \frac{1}{2};$$

当 $x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 时 $f(x)=\frac{1}{4}$；当 $x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ 时 $f(x)=\frac{3}{4}$；一般地，在第 n 步所取去的 n 个区間之上，从左到右，依次各令 $f(x)$ 等于 $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}$。如此，函数 $f(x)$ 定义于集合 H_0 的諸点上，而在 (52) 中构成这集合的每个开区間上保持常数值。再定义 $f(x)$ 于 $[0, 1]$ 的端点，令 $f(0)=0$, $f(1)=1$。我們在 (52) 中每个区間上定义函数 $f(x)$ 的原則乃是：在第 n 步所得的 H_0 的某个区間上，令 $f(x)$ 等于其在以前已得到的邻接区間上数值的算术中值，而如果这 H_0 中的新区間之一边并沒有集合 H_0 中以前得到的区間时，則可取 $f(x)$ 等于其在一边的邻接区間的值与另一边区間 $[0, 1]$ 端点的值的算术中值。如此直接可知，$f(x)$ 是集合 H_0 上的不减函数，把 $f(x)$ 的定义推广到 F_0 上去。設 $x_0\in F_0$。旣然 F_0 的測度是零，那末在 x_0 的任意 ε 邻域中必有 H_0 的点，而如果集合 H_0 的点 x 从左边趋向于 x_0，那末 $f(x)$ 不减，并有極限，而此極限值我們取做 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值。換句話說；上面的定义乃是：令 $f(x_0)$ 等于 $f(x)$ 在屬于 H_0 而在 x_0 之左的諸点 x 处数值之上确界。在点 $x=1$ 处这定义与以前的规定相符，即仍是 $f(1)=1$。如此在整个区間 $[0, 1]$ 上定义的函数显然不减。不难証明它是連續的。事实上，如果它有一間断点 $x=x'$，那末至少有一个区間 $[f(x'-0), f(x')]$ 或 $[f(x'), f(x'+0)]$ 不縮成一点，而由于这函数的單調性，这区間内部并不含 $f(x)$ 的值。但依上面在 H_0 上定义的 $f(x)$ 諸值在区間 $[0, 1]$ 上到处稠密，于是得出矛盾来，可知 $f(x)$ 并不間断。在 (52) 中每个区間上，$f(x)$ 保持常数值。由不减連續函数 $f(x)$ 出發可以作一完全加法的非負集合函数 $\varphi(\mathscr{E})$，定义于（在任何情形下）一切 B 集合上。依上面所述的，$\varphi(H_0)=0$，所以 $\varphi(\mathscr{E})$ 在一切屬于 H_0 的 B 集合上更是等于零的。如果取区間 $[0, x]$，那末可以写成：

$$[0,\ x]=[0,\ x]\cdot H_0+[0,\ x]\cdot F_0,$$

所以

$$f(x)=\varphi([0,\ x])=\varphi([0,\ x]\cdot H_0)+\varphi([0,\ x]\cdot F_0)。$$

由上面所說的，第一項等于零，而 F_0 的測度等于零，所以 $f(x)$ 簡化成一个特异部分[73]：

$$f(x)=\varphi([0,\ x]\cdot F_0),$$

而 F_0 起着公式(20)中 H 的作用，$f(x)$ 起着其中 $\omega(x)$ 的作用。

再研究一下集合 F_0。連續不減函数 $f(x)$ 取从 0 到 1 間的一切实数值。在所除去的每个区間上，連同其端点在内，$f(x)$ 保持常数值，而所除去的区間的数目是可数无穷的。但 $f(x)$ 一切值的集合是不可数的(其权与連續統的相同)。所以显然除了所除去諸区間端点以外 F_0 还包含其他的点。可以証明，F_0 有連續統的权。

77. 多变数的絕对連續函数 与我們作一个变数的絕对連續点函数[75]完全一样，也可以介紹多变数的絕对連續函数的概念。我們仅考察两变数的函数。設在二維区間 $\Delta_0[a\leqslant x\leqslant b;c\leqslant y\leqslant d]$ 上定义一个連續函数 $F(x,y)$。可以借它之助作一区間函数 $\varphi(\delta)$，其中 δ 表区間 Δ_0 中的区間；就是說，如果区間 δ 由不等式 $x_1\leqslant x\leqslant x_2;\ \ y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 定义，那末与以前一样，令

$$\varphi(\delta)=F(x_2,\ y_2)-F(x_1,\ y_2)-F(x_2,\ y_1)+F(x_1,\ y_1), \tag{53}$$

而 δ 是閉的或是开的并无关紧要，因为 $F(x,\ y)$ 依条件是連續的。如果向 $F(x,\ y)$ 添加和 $f_1(x)+f_2(y)$，而其中第一項只与 x 有关，第二項只与 y 有关，那末这对 $\varphi(\delta)$ 并无影响。区間函数 $\varphi(\delta)$ 叫做絕对連續的，是指它滿足与(24)相似的条件[74]，就是說，如果对于任意預定的正数 ϵ，有某一正数 η 与之相应，而如 $\delta_k(k=1,2,\cdots,n)$是互不重叠的区間，并且其面积之和 $<\eta$，那末

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi(\delta_k)\right|\leqslant\epsilon。$$

定义 函数 $F(x,y)$ 叫做两变数 $(x,\ y)$ 的絕对連續函数，是指由公式(53)定义的 $\varphi(\delta)$ 是絕对連續的区間函数，而且此外 $F(a,\ y)$ 及 $F(x,\ c)$ 是 y 及 x 的絕对連續函数。

$F(x,\ y)$在区間 Δ_0 的下边上和左边上絕对連續这一条件之所以必須，是

因为可能对 $F(x, y)$ 加上一个和 $f_1(x)+f_2(y)$。写出显然的公式：

$$F(x, y)=[F(x, y)-F(a, y)-F(x, c)+F(a, c)]+$$
$$+[F(x, c)-F(a, c)]+[F(a, y)-F(a, c)]+F(a, c)。$$

右边第一项是 $\varphi(\delta_{x,y})$，其中 $\delta_{x,y}$ 是区間 $a\leqslant x'\leqslant x$, $c\leqslant y'\leqslant y$，而这函数如在[74]中一样，可以表示成可和函数的不定重积分。右边第二項及第三项是 x 及 y 的絕对連續函数，所以可以表示成不定單积分。如此一切絕对連續函数 $F(x, y)$ 可以表示成下列形式：

$$F(x, y)=\int_a^x\int_c^y f(x, y)\,dx\,dy+\int_a^x g(x)\,dx+$$
$$+\int_c^y h(y)\,dy+F(a, c)。\qquad(54)$$

反之，不难看出，凡表示成上列形式的函数必是絕对連續函数。应用傅必尼定理可以把上面公式写成

$$F(x, y)=\int_a^x\left[\int_c^y f(x, y)\,dy+g(x)\right]dx+$$
$$+\int_c^y h(y)\,dy+F(a, c)\qquad(55)$$

或

$$F(x, y)=\int_c^y\left[\int_a^x f(x, y)\,dx+h(y)\right]dy+$$
$$+\int_a^x g(x)\,dx+F(a, c)。\qquad(56)$$

由此可知，如果 $F(x,y)$ 是二变数的絕对連續函数，那末对于任意固定的 y 它是 x 的絕对連續函数，而对于任意固定的 x 它是 y 的絕对連續函数。逆命題并不正确，就是說一个函数可以依每个变数是絕对連續的，但并不是二变数的絕对連續函数①。

公式 (55) 及 (56) 中第一項积分号下的函数依定义 [74] 是絕对連續函数 $F(x, y)$ 的偏导函数：

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}=\int_c^y f(x, y)\,dy+g(x);$$
$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}=\int_a^x f(x, y)\,dx+h(y)。\qquad(56_1)$$

① 譯者注：例如在 $(0, 0)$ 处 $f(x, y)=0$，在以 $(0, 0)$ 为中心的單位正方形的其他点处 $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$。

这些公式中积分号下的函数定义了二阶混合导函数:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right]=f(x, y)。$$

如果偏导函数 F_x 及 F_y 本身也是二变数的絕对連續函数，那末我們可以定义一切二阶偏导函数。如果这些函数仍是二变数的絕对連續函数，那末可以定义一切三阶导函数，余类推。

可以証明，偏导数在 Δ_0 中殆遍是相应商的極限值。例如 F_x 是商 $[F(x+h, y)-F(x, y)]: h$ 的極限，絕对連續函数 $F(x, y)$ 可以解釋成平面上的点函数 $F(M)$。如果我們在这平面上取新坐标 (x', y') 代替旧的笛卡尔坐标 (x, y)，那末得一新函数 $F(x', y')$，它对于新变数可能不是絕对連續函数。作为例子，可考察絕对連續函数

$$F(x, y)=\int_0^x f(t)\,dt,$$

而 $f(t)$ 是連續，但非絕对連續的函数，并可設它就是在 [76] 所作定义于 $[0, 1]$ 上的函数。我們延展它，使当 $x<0$ 时 $f(x)=0$，而 $x>1$ 时 $f(x)=1$。上面公式在全平面上定义了一个絕对連續的函数(它事实上只与 x 有关)。环繞原点旋轉 $45°$，得新坐标，于是

$$F(x', y')=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')} f(t)\,dt。$$

这函数依 x' 的偏导函数可以表成

$$F_{x'}=\frac{1}{\sqrt{2}}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right),$$

这对于固定的 x' 值不是 y' 的絕对連續函数，但如果 $F(x', y')$ 是二变数的絕对連續函数，則依(55) $F_{x'}$ 应当是 y' 的絕对連續函数。注意对于任意选擇的笛卡尔坐标，所作函数对于每个变数的一切值依另一个变数是絕对連續函数。同样上面所建立的理論可以适用于任意多变数的絕对連續函数。

在下节中将討論偏导函数的更一般定义，这定义不仅适用于多变数的絕对連續函数。

78. 偏导函数概念的推广 設 D 是平面上某一区域，就是說，某一开集合(可能是全平面)，并設 $\varphi(x, y)$ 是定义于 D 中的函数，并且在 D 内部的任意有穷的閉区域 D' 上都是可測的可和函数。再設 $\psi(x, y)$ 是連續的，并且有連續的 k 阶偏导数，并在 D' 之外等

于零。首先設 $\varphi(x, y)$ 也是連續的，并在 D 内有連續的 k 阶导数。依 D 取积分，这与依 D' 取积分一样，因为在 D' 之外 $\psi(x, y)\equiv 0$。于是得

$$\iint\limits_D \left[\varphi \frac{\partial^k \psi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}+(-1)^{k-1}\psi \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right]dx\,dy=0。\qquad (57)$$

为了証明这公式，只須应用分部积分，并依含 D' 的某一具有足够好的边界 l 的区域 D'' 积分。依关于边界 l 的条件，ψ 及其到 k 阶的导数都是零。此外，举例說，

$$\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi\right)+\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}。$$

依 D'' 取积分，并注意 $\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi$ 在 l 上等于零，于是得(57)。如果 φ 只是可和，如在本节开始时所指明的，那末我們由 (57) 定义 φ 的偏导数，就是說，可和函数 $\omega(x, y)$ 叫做可和函数 $\varphi(x, y)$ 依 x p_1 次依 y p_2 次的 k 阶导函数，是指无論如何选择函数 $\psi(x,y)$，只要后者及其 k 阶导函数都是在 D 内部連續的，并且在位于 D 内部的某一闭区域 D' 之外等于零，总有

$$\iint\limits_D \left[\varphi \frac{\partial^k \psi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}+(-1)^{k-1}\psi\omega\right]dx\,dy=0。\qquad (58)$$

在上述定义中可和性是設在 D 内部的任意有界闭集合 D' 中成立的。为了証明上述定义合法，必須証明当把相抵函数等同之时导函数 ω 是唯一的。設滿足条件 (58) 的有两个函数 ω_1 及 ω_2。必須証明它們在 D 中相抵，亦即在 D 内的任意区域 D' 中相抵。在 (58) 中依次令 $\omega=\omega_1$ 及令 $\omega=\omega_2$，則把两式相减可得：

$$\iint\limits_D(\omega_1-\omega_2)\psi\,dx\,dy=0,$$

其中 ψ 是具有上述性質的任意函数。在下面的一节中我們将証明由这等式确实可知 $\omega_1-\omega_2$ 与零相抵。广义导函数的表示法和通常一样:

$$\omega=\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}}=\varphi_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}}。$$

在公式(58)中 ψ 的导函数中的微分次序不起什么作用,因为 ψ 依条件有連續导函数。由此直接可知,在广义导函数中微分的次序也不起任何作用。还須注意,定义高阶的广义导函数时不須先知道較低阶的导函数。也可能發生下面的情形,即高阶广义导函数虽然存在,較低阶的导函数并不存在。但在下面我們将看到,最重要的一类函数乃是具有到某一阶为止的一切阶广义导函数的。作为例子,考察 $\varphi(x, y)=f(x)+f(y)$,其中 $f(x)$ 是在[76]中所作的連續增函数。这函数定义于区間 D: $0<x<1$, $0<y<1$ 内。容易証明,广义导函数 $\varphi_{xy}(x, y)$ 存在,并等于零。依(58),这可以归結于等式

$$\iint\limits_D f(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dx\,dy+\iint\limits_D f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dx\,dy=0。$$

現在証明第一項等于零。我們把它写成下面的形式:

$$\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx\,dy,$$

而依 y 所取的导函数是依通常意义的。首先依 y 积分,可知积分等于零,因为导函数 ψ_x 在某一位于 D 内部的区域 D' 之外等于零。完全同样可以証明,第二項也等于零。現在証明,所作的函数 φ 沒有依 x 的广义导函数。我們用归謬証法。設如此的导函数 $\omega(x,y)$ 存在,就是說:

$$\iint\limits_D\left[(f(x)+f(y))\frac{\partial\psi}{\partial x}+\omega\psi\right]dx\,dy=0。\tag{59}$$

定义函数

$$\varphi_1(x, y)=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\omega(x', y)dx',$$

这对于殆遍 y 值，是依 x 絕对連續的，并設 $\varphi_2(x, y)=\varphi_1(x, y)+$ $+f(y)$。既然对于任意位于 D 内部的区間 D'，ω 是可和的，上写的积分对于殆遍 y 值存在。下面公式成立：

$$\iint\limits_D\left(\varphi_2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\omega\psi\right)dx\,dy=0,$$

这公式的正确性很容易証明；首先依 x 积分；应用分部积分法，并注意 ψ 与 ψ_x 在位于 D 内部的某一区間 D' 外部等于零。把上式从(59)減去，可得

$$\iint\limits_D[f(x)-\varphi_1(x, y)]\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\,dy=0。$$

例如可以設 ψ 只依从 x。依区間 D'：$a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$ 积分，在这区間之外 ψ 等于零，且首先依 y 积分，得

$$\int_a^b\left\{f(x)(b-a)-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left[\int_a^b\omega(x', y')dy'\right]dx'\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=0。$$

既然 ψ 是任意的，可知位于花括弧内的差是常数[53]：

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left[\int_a^b\omega(x', y')dy'\right]dx'+C,$$

这就是說，$f(x)$ 是絕对連續的，而我們知道这是不正确的。如此函数 $\varphi(x, y)=f(x)+f(y)$ 有广义的导函数 φ_{xy}，但沒有一阶的广义导函数。我們已經說过，最重要的情形乃是 φ 具有从 1 阶直到 l 阶的一切广义导函数。此时可以証明，对于一个变数的殆遍值，1 阶到 $l-1$ 阶的諸导函数对于另一个变数是絕对連續的。这命題的証明与剛才証明 $f(x)$ 的絕对連續性完全一样。再注意，整个广义偏导函数理論自然地推广到任意多变数的情形。

在一变数的情形，广义偏导函数无意义。不难証明，如果 $\varphi(x)$ 有广义的 l 阶导函数，那末它以及到 $(l-1)$ 阶止諸导函数都是絕

对连續函数。

79. 中值函数 我們介紹一种平均任一可和函数 $f(P)$ 的方法。如此可以引到一序列函数 $F_n(P)$，这些函数都有一切阶的导函数，并当 n 很大时，依一定的意义与 $f(P)$ 接近。所得諸中值函数 $F_n(P)$ 的导函数与取中值的函数 $f(P)$ 的广义导函数是密切联系的，我們以后将要証明。首先作中值函数，并闡述其性質。

設 $\omega(t)$ 是对一切实数 t 定义的某函数，并設它有一切阶的通常导函数，它在区間 $(-1,+1)$ 内是非負的，在这区間之外等于零，而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)dt=\int_{-1}^{+1}\omega(t)dt=1。\tag{60}$$

作为例子，可以举如下定义的函数：

$$\begin{aligned}&\omega(t)=ce^{\frac{1}{t^2-1}} \quad 当\ |t|<1\ 时,\\&\omega(t)=0 \quad\quad\quad 当\ |t|\geqslant 1\ 时,\end{aligned}\tag{61}$$

而常数 c 由条件

$$c\int_{-1}^{+1}e^{\frac{1}{t^2-1}}dt=1$$

定义。如果 $t\to 1$ 是由小于 1 的值趋近 1 的，那末 $\frac{1}{t^2-1}\to-\infty$，而当 t 經过 $t=1$ 时，函数 $\omega(t)$ 的各阶导函数并不失掉連續性，且对于 $t\geqslant 1$ 变成等于零的值。同理当 t 由大于 -1 的值趋近 -1 时也一样。

現在作在平面上的中值核序列

$$\psi_n(x,y;\xi,\eta)=n^2\omega(nx-n\xi)\omega(ny-n\eta)。\tag{62}$$

非負函数 $\psi_n(x,y;\xi,\eta)$ 有各阶連續导函数，只与差 $x-\xi$ 及 $y-\eta$ 有关，在二維区間 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}\left(|x-\xi|\leqslant\frac{1}{n},\ |y-\eta|\leqslant\frac{1}{n}\right)$ 之外等于零，而依 (60) 可知

$$\iint\limits_{\Delta_n^{(\xi,\eta)}}\psi_n(x,y;\xi,\eta)dx\,dy=1。\tag{62$_1$}$$

設 $f(x, y)$ 是在有界閉区域 D_0 中的某一可和函数。延展它到 D_0 之外，并在 D_0 之外令它等于零，作中值函数序列

$$F_n(\xi, \eta) = \iint f(x, y)\psi_n(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy。\qquad (63)$$

对于任意固定的 (ξ, η)，积分号下的函数在 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}$ 之外是零，而所写的积分不論看做取于区間 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}$ 或全平面之上都一样。

如果 (ξ, η) 在 D_0 之外，就是說，如果 (ξ, η) 到 D_0 的距离大于零，那末对于一切足够大的值 n，积分号下的函数恒等于零，而 $F_n(\xi, \eta)=0$ 对于足够大的 n 成立。不难得知，中值函数 $F_n(\xi,\eta)$ 在全平面上是連續的，并有一切阶的导函数。例如，注意 ψ_n 只依存于差 $x-\xi$ 及 $y-\eta$，

$$|F_n(\xi+h, \eta+k) - F_n(\xi, \eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \iint |f(x,y)|\,|\psi_n(x-h,y-k;\xi,\eta) - \psi_n(x,y;\xi,\eta)|\,dx\,dy。$$

由定义 (62) 及 $\omega(t)$ 的一致連續性可知，对于任意預給的 ε，必存在一个正数 ε_1，使当 $|h|$ 及 $|k| < \varepsilon_1$ 时，

$$|\psi_n(x-h, y-k;\xi, \eta) - \psi_n(x, y;\xi, \eta)| \leqslant \varepsilon,$$

所以

$$|F_n(\xi+h, \eta+k) - F_n(\xi, \eta)| \leqslant \varepsilon \iint_{D_0} |f(x, y)|\,dx\,dy,$$

由此，旣然 ε 是任意的，可知 $F_n(\xi, \eta)$ 是連續的。再証明依 ξ 的偏导函数存在且是連續的。作商

$$\frac{F_n(\xi+h, \eta) - F_n(\xi, \eta)}{h} =$$

$$= \iint f(x, y)\frac{\psi_n(x-h, y;\xi, \eta) - \psi_n(x, y;\xi, \eta)}{h}\,dx\,dy。\qquad (64)$$

依中值定理

$$\frac{\psi_n(x-h, y;\xi, \eta) - \psi_n(x, y;\xi, \eta)}{h} =$$

$$= -n^3\omega'(nx-n\theta h-n\xi)\,\omega(ny-n\eta) \quad (0<\theta<1)。$$

对于任意 h，右边依絕对值不大于某一正数 K，而在积分 (64) 中积分号下的函数依絕对值并不大于可和函数 $K|f(x, y)|$，因此可以在积分号下取極限值，而得

$$\frac{\partial F_n(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\iint f(x, y) \frac{\partial \psi_n(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} dx\, dy =$$

$$= \iint f(x, y) \frac{\partial \psi_n(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} dx\, dy。$$

这偏导函数的連續性可以与上面完全一样地証明。上面的証法对于一切阶的偏导函数都依然有效，而后者可以由在积分号下微分得出：

$$\frac{\partial^k F_n(\xi, \eta)}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2}} = \iint f(x, y) \frac{\partial^k \psi_n(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2}} dx\, dy。\qquad (65)$$

现在証明有关中值函数的某些定理：

定理 1. 如果 $f(x, y) \in L_2$，那末

$$\iint |F_n(x, y)|^2 dx\, dy \leqslant \iint_{D_0} |f(x, y)|^2 dx\, dy, \qquad (66)$$

$$\lim_{n \to \infty} \iint |f(x, y) - F_n(x, y)|^2 dx\, dy = 0。\qquad (67)$$

把 (63) 写成下面形式：

$$F_n(\xi, \eta) = \iint \sqrt{\psi_n(x, y; \xi, \eta)} \sqrt{\psi_n(x, y; \xi, \eta)}\, f(x, y) dx\, dy,$$

而应用舒伐尔兹不等式：

$$|F_n(\xi, \eta)|^2 \leqslant \iint \psi_n(x, y; \xi, \eta) dx\, dy \times$$

$$\times \iint \psi_n(x, y; \xi, \eta) |f(x, y)|^2 dx\, dy。$$

右边第一因子等于 1。依 ξ, η 积分，并在右边变换积分的次序，可得 [70]：

$$\iint |F_n(\xi, \eta)|^2 d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \iint |f(x, y)|^2 \left[\iint \psi_n(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta\right] dx\, dy。$$

注意等式(62)及 ψ_n 只依从于坐标差值这一事实，可知在上面不等式右边方括号中的积分等于1，由此可得(66)，因为既然 $f(x, y)$ 在 D_0 之外等于0，在全平面上的积分可以换成在 D_0 上的积分。函数 $F_n(x, y)$ 在某一較 D_0 寬广的区域 D_n 中异于零，而 D_n 当 n 无限增大时趋向于 D_0。

回到公式(67)的証明。把 D_0 包括于某一区間 Δ_0 之中。对于任意預給的正数 ε，必存在某一在区面 Δ_0 中連續的函数 $f_0(x, y)$，使[57]

$$\iint_{\Delta_0} |f-f_0|^2 dx\, dy \leqslant \varepsilon。 \tag{68}$$

用 $F_n(\xi, \eta)$ 表示 $f(x, y)$ 的中值函数，并用 $F_{n,0}(\xi, \eta)$ 表示 $f_0(x, y)$ 的中值函数，且設在 Δ_0 之外 $f_0(x, y)=0$。差值 $F_n(\xi, \eta)-F_{n,0}(\xi, \eta)$ 是 $f-f_0$ 的中值函数，而依(66)及(68)

$$\iint |F_n-F_{n,0}|^2 dx\, dy \leqslant \varepsilon。 \tag{69}$$

把差值 $f-F_n$ 表示成下面形式：

$$f-F_n=(f-f_0)+(f_0-F_{n,0})+(F_{n,0}-F_n),$$

并注意显然的不等式 $|a+b+c|^2 \leqslant 3(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$ 及不等式(68)及(69)，則

$$\iint |f-F_n|^2 dx\, dy \leqslant 6\varepsilon + 3\iint |f_0-F_{n,0}|^2 dx\, dy。$$

如此，由于 ε 是任意的，为了証明(67)，只須証明

$$\lim_{n\to\infty} \iint |f_0-F_{n,0}|^2 dx\, dy = 0。 \tag{70}$$

函数 $f_0(x, y)$ 显然是有界的，就是說 $|f_0(x, y)| \leqslant N$。既然

$$F_{n,0}(\xi, \eta) = \iint f_0(x, y)\psi_n(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy,$$

由此可知

$$|F_{n,0}(\xi,\eta)|\leqslant\iint|f_0|\psi_n(x,y;\xi,\eta)dx\,dy\leqslant$$
$$\leqslant N\iint\psi_n(x,y;\xi,\eta)dx\,dy=N,$$

就是說$|F_{n,0}|\leqslant N$。在(70)的积分中积分号下的函数不大于$4N^2$，而为了証明公式(70)，只須[52]証明殆遍

$$F_{n,0}(x,y)\to f_0(x,y)。\tag{71}$$

这在Δ_0之外的每点处满足，因为这时$f_0(x,y)=0$，而对于足够大的n值，$F_n(x,y)=0$。

現在証明(71)对于凡位于Δ_0內部的点(ξ,η)也满足。注意(62_1)，可以得

$$f_0(\xi,\eta)-F_{n,0}(\xi,\eta)=$$
$$=\iint\limits_{\Delta_n^{(\xi,\eta)}}[f_0(\xi,\eta)-f_0(x,y)]\psi_n(x,y;\xi,\eta)dx\,dy,$$

由此

$$|f_0(\xi,\eta)-F_{n,0}(\xi,\eta)|\leqslant$$
$$\leqslant\iint\limits_{\Delta_n^{(\xi,\eta)}}|f_0(\xi,\eta)-f_0(x,y)|\psi_n(x,y;\xi,\eta)dx\,dy。\tag{72}$$

无限地增大n时，区間$\Delta_n^{(\xi,\eta)}$无限地縮向于点(ξ,η)，因此对于任意預給的正数ε，必存在一数N，使当$(x,y)\in\Delta_n^{(\xi,\eta)}$及$n>N$时，$|f_0(\xi,\eta)-f_0(x,y)|\leqslant\varepsilon$。如此由(62)及(72)可知当$n>N$时$|f_0(\xi,\eta)-F_{n,0}(\xi,\eta)|\leqslant\varepsilon$，就是說$F_{n,0}(x,y)\to f_0(x,y)$，不仅在$\Delta_0$之外，而且在它之內也成立，就是說殆遍成立。如此公式(66)及(67)証明了，而定理1也完全得証。由(67)可知存在一序列标号n_k，使$F_{n_k}(x,y)\to f(x,y)$殆遍成立[57]。可以証明，整个序列$F_n(x,y)$也殆遍趋于$f(x,y)$，但我們不詳細討論。

注　如果关于$f(x,y)$只知道它在D_0中可和，那末公式(66)及(67)換成公式

$$\iint |F_n| \, dx \, dy \leqslant \iint_D |f| \, dx \, dy \tag{73}$$

及

$$\lim_{n \to \infty} \iint |f - F_n| \, dx \, dy = 0。 \tag{74}$$

第一式直接由(63)可以証明，而第二式的証明与(67)的証明相类似，但不必应用布伐尔兹不等式。

80. 中值函数(續)　我們現在証明某些定理，这些定理把中值函数与在[78]中介紹的广义导函数联系起来。

定理 2. 如果 $f(x, y)$ 在 D_0 内部有广义导函数 $f_{x^{p_1}y^{p_2}}$，那末中值函数 F_n 的相应导函数等于广义导函数 $f_{x^{p_1}y^{p_2}}$ 的中值函数。

設 (ξ, η) 是 D_0 内部的点。注意 ψ_n 只依存于坐标差值，可以写成

$$\frac{\partial^l F_n(\xi, \eta)}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2}} = \iint f(x, y) \frac{\partial^l \psi_n}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2}} dx \, dy =$$
$$= \iint f(x, y) \cdot (-1)^l \frac{\partial^l \psi_n}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}} dx \, dy。 \tag{75}$$

函数 ψ_n 在区間 $\Delta_n^{(\xi, \eta)}$ 之外是零，而这区間对于一切足够大的 n 值位于 D_0 之内。如此 ψ_n 起着函数 ψ 在公式(59)中的作用，而把这式中右边积分依公式(59)代换，可得

$$\frac{\partial^l F_n(\xi, \eta)}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2}} = \iint \frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}} \psi_n \, dx \, dy, \tag{76}$$

就是說，中值函数的导函数的确是等于相应导函数的中值函数，只須后者存在就够了。逆定理比較困难，利用这逆定理可由中值函数的导函数某一性質肯定广义导函数的存在。首先陈述一輔助定理，在以后再証明。

輔助定理　如果 $\varphi_n(P)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是在 $\mathscr{E}$ 上的 L_2 中的函数序列，而

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi_n^2(P) m(d\mathscr{E}) \leqslant A,$$

其中 A 是与 n 无关的某一常数，那末必存在一 L_2 中的函数 $\omega(P)$ 及一部分序列 $\varphi_{n_k}(P)$，使对于 L_2 中的任意函数 $\psi(P)$ 下面公式成立：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathscr{E}}\psi\varphi_{n_k}m(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}\psi\omega m(d\mathscr{E}),\qquad (76_1)$$

而且

$$\int_{\mathscr{E}}\omega^2(P)m(d\mathscr{E})\leqslant A。\qquad (76_2)$$

現在証明下面定理。

定理 3 如果中值函数的某一导函数满足

$$\iint\left|\frac{\partial^l F_n(x,y)}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|^2 dx\,dy\leqslant A,\qquad (77)$$

那末在 D_0 内部存在广义导函数 $f_{x^{p_1}y^{p_2}}(x,y)$，后者满足

$$\iint_D\left|\frac{\partial^l f}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|^2 dx\,dy\leqslant A。\qquad (78)$$

設 D' 是位于 D_0 内部的任意閉区域，而 ψ 是有 k 阶連續导函数的函数，并在 D' 之外等于零。显然它属于 D_0 上的 L_2(它是連續的，从而是有界的)，由輔助定理可知存在一 D_0 内部 L_2 中的函数 ω，及一序列的标号 n_k，使

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{D'}\psi\frac{\partial^l F_{n_k}}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\,dx\,dy=\iint_{D'}\psi\omega\,dx\,dy,\qquad (79)$$

而 (76_2) 满足。对于具有連續导函数的函数 ψ 我們可以写出分部积分公式

$$\iint_{D'}\psi\frac{\partial^l F_{n_k}}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}dx\,dy=(-1)^l\iint_{D'}F_{n_k}\frac{\partial^l\psi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}dx\,dy。\qquad (80)$$

在这等式中取極限值，在左边可得公式(79)右边的积分。不难看出，(80)右边的积分的極限等于乘积 $f\psi_{x^{p_1}y^{p_2}}$ 的积分。事实上，

$$\left|\iint_{D'}(f-F_{n_k})\frac{\partial^l\psi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}dx\,dy\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\max\left|\frac{\partial^l\psi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|\cdot\iint_{D'}|f-F_{n_k}|^2dx\,dy\cdot m(D'),$$

而右边依(67)趋向于零。如此在公式(80)中取极限值，可得

$$\iint_{D'}\psi\omega\,dx\,dy=(-1)^l\iint_{D'}f\frac{\partial^l\psi}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}dx\,dy,$$

由此可知，ω 是广义导函数 $f_{x^{p_1}y^{p_2}}$，而定理得証。

借用赫勒德尔不等式，及輔助定理的推广形式，可以証明定理1及3不仅对于 L_2，而且对于任意 $L_p(p>1)$ 也成立。

定理 1. 如果 $f(x,y)\in L_p$，L_p 是取于 D 中的，那末

$$\iint|F_n|^p\,dx\,dy\leqslant\iint_D|f|^p dx\,dy,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\iint|f-F_n|^p dx\,dy=0。\tag{81}$$

定理 3. 如果中值函数的某一导函数满足

$$\iint\left|\frac{\partial^l F_n}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|^p dx\,dy\leqslant A,$$

那末必存在广义导函数 $f_{x^{p_1}y^{p_2}}$，而后者满足

$$\iint_D\left|\frac{\partial^l f}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|^p dx\,dy\leqslant A。$$

应用定理 2，可知下面公式正确：

$$\lim_{n\to\infty}\iint\left|\frac{\partial^l f}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}-\frac{\partial^l F_n}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|^p dx\,dy=0。$$

在研究中值函数时，曾假定原来的函数 f 在有界区域 D_0 中可和。經过一些不紧要的改变后，对于 f 在空間或空間中任意有界区域中，或包含于 D_0 內部的任意閉区域 D' 中可和的情形可以重复上

面的整个研究。

注 由公式(67)可知，如果$f(x, y)$屬于D_0上的L_2，那末中值函数依中值趋向于$f(x, y)$。現在設$f(x, y)$在D_0内部連續，而設D'是位于D_0内部的任意閉区域。現在証明在这情形下$F_n(x, y)$在D'中一致趋于$f(x, y)$。下面的推理与在証明定理1时关于$f_0(x, y)$所作的完全相似。注意(62_1)及(63)，可知

$$f(\xi, \eta)-F_n(\xi, \eta)=$$

$$=\iint[f(\xi, \eta)-f(x, y)]\psi_n(x, y; \xi, \eta)dx\,dy,$$

由此，由于核是正的，可得

$$|f(\xi, \eta)-F_n(\xi, \eta)|\leqslant$$

$$\leqslant\iint|f(\xi, \eta)-f(x, y)|\psi_n(x, y; \xi, \eta)dx\,dy。$$

取N足够大，使当$n\geqslant N$，而$(x, y)\in\Delta_n^{(\xi, \eta)}$时，对于从$D'$中选擇的任意$(\xi, \eta)$，$|f(\xi, \eta)-f(x, y)|\leqslant\varepsilon$。因为$f(x, y)$在位于$D_0$内部的任意閉区域中是一致連續的，可以选擇$N$使与屬于$D'$中的$(\xi, \eta)$无关。注意$(62_1)$，又因为$\psi_n(x, y; \xi, \eta)$在$\Delta_n^{(\xi, \eta)}$之外等于零，由上面不等式可得：当$n\geqslant N$时$|f(\xi, \eta)-F_n(\xi, \eta)|\leqslant\varepsilon$，这正是所要証明的。如果$f(x, y)$在$D'$中有直到$l$阶的一切导函数，而这些导函数是連續的，那末它們与广义导函数相同，而注意定理2及上面叙述的証明，可以断定下面定理的正确性：

定理4. 如果$f(x, y)$以及其到l阶止的一切导函数都是在D_0内部連續的，那末在位于D_0内部的任意閉区域D'中，中值函数与其到l阶止的各阶导函数在D'中一致趋向于$f(x, y)$及其各相应阶导函数。

再注意，如果取中值函数$f(x, y)$是有界的，即$|f(x, y)|\leqslant m$，那末由(62_1)及ψ_n的非負性可知

$$|F_n(\xi,\eta)|\leqslant\iint_{D_0}|f(x,y)|\psi_n(x,y;\xi,\eta)dx\,dy\leqslant m_\circ$$

在本节末尾将証明在[78]中应用过的定理。

定理 5. 如果 $\omega(x,y)$ 在位于 D_0 内部的任意閉区域 D' 中可和，且滿足

$$\iint_{D_0}\omega\varphi\,dx\,dy=0, \tag{82}$$

而不論 φ 如何选擇，只要它有直到 l 阶的連續导函数，并且在上述那种类型的区域 D' 之外等于零，那末 ω 在 D_0 中与零相抵。

只須証明，(82)不仅对于具有連續导函数的函数 φ 成立，而是对于在某区域 D' 之外等于零的任意有界可测函数 φ 成立。在此之后，証明 ω 在 D_0 内部与零相抵与在[53]中証明定理12时完全一样。設 φ 是某一函数，而 $|\varphi|\leqslant m$，又設 φ_n 是它的中値函数，因而也滿足 $|\varphi_n|\leqslant m$。当 n 足够大时 φ_n 在位于 D_0 内部的某一閉区域 D' 之外等于零，而 φ_n 既然有一切阶导函数，依定理的条件可以写成

$$\iint_{D_0}\omega\varphi_n dx\,dy=0。 \tag{83}$$

函数 φ_n 在 D_0 中依中値收斂于 φ，并存在一序列标号 $n=n_1,n_2,\cdots$，使 $\varphi_{n_k}\to\varphi$ 在 D_0 中殆遍成立。此外，$|\omega\varphi_{n_k}|\leqslant m|\omega|$，而右边是在 D' 中可和的函数。在(83)中依次令 $n=n_1,n_2,\cdots$，而在积分号下取極限値，依[55]中的定理可得(82)，于是定理得証。

81. 輔助命題 在这两节中將介紹新概念并証明輔助命題，这些对于証明[73]中的基本定理及下面推广积分概念是必要的。

我們將考察 C 族上的完全加法函数 $\varphi(\mathscr{E})$，而 C 是由 L_G 中某一集合 $\mathscr{E}_0$ 及凡屬于 L_G 中的 $\mathscr{E}_0$ 的部分集合所組成，并設 $G(\mathscr{E}_0)$ 有穷且不等于零。用 V_1 表所有这类函数的集合。如果 $\varphi_1(\mathscr{E})$ 及

$\varphi_2(\mathscr{E})\in V_1$，那末 $C_1\varphi_1(\mathscr{E})+C_2\varphi_2(\mathscr{E})$ 也 $\in V_1$。我們知道，对于 V_1 中的任一 $\varphi(\mathscr{E})$，和

$$t_\delta(\varphi)=\sum_k|\varphi(\mathscr{E}_k)| \tag{84}$$

对于分 $\mathscr{E}_0$ 成有窮多集合 $\mathscr{E}_k$ 的任意分割是有界的 [72]。和 t_δ 的上确界，就是 $\varphi(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的全变分，我們用 $\|\varphi\|_1$ 表示。显然 $\|c\varphi\|_1=|c|\cdot\|\varphi\|_1$，其中 c 是常数。如果分割 δ' 是分割 δ 的后繼，那末我們写成 $\delta'>\delta$。留意对于任意分割 $e=e'+e''$，$|\varphi(e)|\leqslant|\varphi(e')|+|\varphi(e'')|$，可知如果 $\delta'>\delta$，$t_{\delta'}(\varphi)\geqslant t_\delta(\varphi)$。如果 δ_n 是一序列分割，使 $t_{\delta_n}(\varphi)\to\|\varphi\|_1$，而 $\delta_n'>\delta_n$，那末 $t_{\delta_n'}(\varphi)\to\|\varphi\|_1$。如果 $t_{\delta_n}(\varphi)\to\|\varphi\|_1$，$t_{\delta_n'}(\psi)\to\|\psi\|_1$，而 $t_{\delta_n''}(\varphi+\psi)\to\|\varphi+\psi\|_1$，那末令 $\delta_n'''=\delta_n\delta_n'\delta_n''$，可得

$$t_{\delta_n'''}(\varphi)\to\|\varphi\|_1,\quad t_{\delta_n'''}(\psi)\to\|\psi\|_1,\quad t_{\delta_n'''}(\varphi+\psi)\to\|\varphi+\psi\|_1。$$

如果 $\mathscr{E}_{k,n}'''$ 是 δ_n''' 分割中的部分集合，那末由不等式

$$|\varphi(\mathscr{E}_{k,n}''')+\psi(\mathscr{E}_{k,n}''')|\leqslant|\varphi(\mathscr{E}_{k,n}''')|+|\psi(\mathscr{E}_{k,n}''')|$$

再求和，并取極限值，可得

$$\|\varphi+\psi\|_1\leqslant\|\varphi\|_1+\|\psi\|_1。 \tag{85}$$

与和(84)同时对于滿足条件

$$\text{当}\quad G(\mathscr{E})=0\text{ 时}\quad \varphi(\mathscr{E})=0 \tag{86}$$

的函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 考察和

$$S_\delta(\varphi)=\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}。 \tag{87}$$

如果 $G(\mathscr{E}_k)=0$，那末和中相应項成为 $\frac{0}{0}$ 的形式，而我們算它做零。也可以不作如此的保留，只須限于考察使一切 $G(\mathscr{E}_k)\neq0$ 的 δ 就够了，而这等于設把凡使 $G(\mathscr{E}_k)=0$ 的 $\mathscr{E}_k$ 合并到其他部分集合中去。$S_\delta(\varphi)$ 值的集合并不一定是有界的。用 V_2 表凡滿足条件(86) 并使和 $S_\delta(\varphi)$ 有界的函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 的集合。集合 V_2 是 V_1 的

部分集合。不难看出，如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_2$，而 $\psi(\mathscr{E})\in V_2$，那末 $c\varphi(\mathscr{E})\in V_2$，$\varphi(\mathscr{E})+\psi(\mathscr{E})\in V_2$，其中 c 是常数。和 $S_\delta(\varphi)$ 的上确界用 $\|\varphi\|_2$ 表示。我們将証明当 $\delta'>\delta$ 时，$S_{\delta'}(\varphi)\geqslant S_\delta(\varphi)$。关于这点，只須証明如果 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''$ 是 $\mathscr{E}$ 的分割，則

$$\frac{\varphi^2(\mathscr{E}')}{G(\mathscr{E}')}+\frac{\varphi^2(\mathscr{E}'')}{G(\mathscr{E}'')}\geqslant\frac{\varphi^2(\mathscr{E})}{G(\mathscr{E})} \tag{87$_1$}$$

就够了。这不等式与下面的同效：即

$$G(\mathscr{E})G(\mathscr{E}'')\varphi^2(\mathscr{E}')+G(\mathscr{E})G(\mathscr{E}')\varphi^2(\mathscr{E}'')-$$
$$-G(\mathscr{E}')G(\mathscr{E}'')\varphi^2(\mathscr{E})\geqslant 0,$$

而由于 $G(\mathscr{E})=G(\mathscr{E}')+G(\mathscr{E}'')$，$\varphi(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E}')+\varphi(\mathscr{E}'')$，可以把上面不等式写成

$$[G(\mathscr{E}'')\varphi(\mathscr{E}')-G(\mathscr{E}')\varphi(\mathscr{E}'')]^2\geqslant 0。$$

与上面一样，如果 $S_{\delta_n}(\varphi)\to\|\varphi\|_2$，而 $\delta_n'\geqslant\delta_n$，那末 $S_{\delta_n'}(\varphi)\to\|\varphi\|_2$。

現在对于 V_2 中的函数証明一个联結 $\|\varphi\|_1$ 及 $\|\varphi\|_2$ 的不等式。使用舒伐尔兹不等式可得

$$t_\delta(\varphi)=\sum_k|\varphi(\mathscr{E}_k)|=\sum_k\frac{|\varphi(\mathscr{E}_k)|}{\sqrt{G(\mathscr{E}_k)}}\sqrt{G(\mathscr{E}_k)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}}\cdot\sqrt{\sum_k G(\mathscr{E}_k)}=\sqrt{\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}}\sqrt{G(\mathscr{E}_0)},$$

就是說 $t_\delta(\varphi)\leqslant\sqrt{S_\delta(\varphi)}\sqrt{G(\mathscr{E}_0)}$。完全与証明 (85) 时同样，可以作分割序列 δ_n，使 $t_{\delta_n}(\varphi)\to\|\varphi\|_1$，$S_{\delta_n}(\varphi)\to\|\varphi\|_2$，而取不等式 $t_{\delta_n}(\varphi)\leqslant\sqrt{S_{\delta_n}(\varphi)}\cdot\sqrt{G(\mathscr{E}_0)}$ 的極限可得

$$\|\varphi\|_1\leqslant\sqrt{\|\varphi\|_2}\cdot\sqrt{G(\mathscr{E}_0)}。\tag{88}$$

还要注意一族函数 $\varphi(\mathscr{E})$。函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 叫做基本上有界的，是指存在常数 C，使对于 L_G 中含于 $\mathscr{E}_0$ 的任一集合 $\mathscr{E}$ 都有

$$|\varphi(\mathscr{E})|\leqslant CG(\mathscr{E}),\tag{89}$$

而一切基本上有界的函数（相应于不同的 C 值）全体表成 V_0。由

(87)直接可以知道，对于任意分割 δ，$S_\delta(\varphi)\leqslant C^2G(\mathscr{E}_0)$，就是說，$V_0$ 是 V_2 的部分。

从前曾考察过片段定值的点函数[43]。現在介紹片段定值的集合函数。满足条件(86)的集合函数 $\psi(\mathscr{E})$叫做在$\mathscr{E}_0$中片段定值的，是指存在一个分 $\mathscr{E}_0$ 为有穷多部分 $\mathscr{E}_k$ 的分割，使

$$\left.\begin{aligned}&\psi(\mathscr{E})=\frac{\psi(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}G(\mathscr{E}),\ \text{如果}\ \mathscr{E}\subset\mathscr{E}_k\ \text{而}\ G(\mathscr{E}_k)\neq 0\\&\psi(\mathscr{E})=0,\ \text{如果}\ \mathscr{E}\subset\mathscr{E}_k\ \text{而}\ G(\mathscr{E}_k)=0\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

如果用 a_k 表比值 $\psi(\mathscr{E}_k):G(\mathscr{E}_k)$(而如果 $G(\mathscr{E}_k)=0$ 則算 a_k 做 0)，那末上面那片段定値的函数 $\psi(\mathscr{E})$ 可以表示成下面积分的形式：

$$\psi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}\sum_k a_k\omega_{\mathscr{E}_k}(P)G(d\mathscr{E}),\tag{91}$$

其中 $\omega_{\mathscr{E}_k}(P)$是集合 $\mathscr{E}_k$ 的特征函数。在积分号下的乃是一个片段定値的点函数，它在集合 $\mathscr{E}_k$ 上等于 a_k。反之，凡作上面形状的积分一定表現一个片段定値的集合函数 $\psi(\mathscr{E})$。

对于任意預定的分割 δ，使 $\mathscr{E}_0$ 上的任意一个满足条件(86)的完全加法集合函数 $\varphi(\mathscr{E})$，及任意一个在 $\mathscr{E}_0$ 上可测且可和的点函数 $f(P)$，与片段定値函数 $\varphi_\delta(\mathscr{E})$ 及 $f_\delta(P)$ 相对比。就是說对于屬于 $\mathscr{E}_k$ 的 $\mathscr{E}$ 借下面公式定义 $\varphi_\delta(\mathscr{E})$：

$$\frac{\varphi_\delta(\mathscr{E})}{G(\mathscr{E})}=\frac{\varphi(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)},\tag{92}$$

也就是对于 $\mathscr{E}_0$ 中的任意 $\mathscr{E}$，借下面公式定义它：

$$\varphi_\delta(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}\sum_k a_k\omega_{\mathscr{E}_k}(P)G(d\mathscr{E}),\ \text{其中}\ a_k=\frac{\varphi(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\text{。}\tag{93}$$

函数 $f_\delta(P)$ 則定义为：当 $P\in\mathscr{E}_k$ 时 $f_\delta(P)$ 等于常数

$$f_\delta(P)=\frac{1}{G(\mathscr{E}_k)}\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E})\text{。}\tag{94}$$

如果 $G(\mathscr{E}_k)=0$，那末表示式 (94) 算做等于零。如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 表示成积分

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}), \tag{95}$$

那末显然

$$\varphi_\delta(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f_\delta(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{96}$$

由 $\varphi_\delta(\mathscr{E})$ 及 $f_\delta(P)$ 的定义直接可知

$$\left.\begin{aligned}(c_1\varphi(\mathscr{E})+c_2\psi(\mathscr{E}))_\delta&=c_1\varphi_\delta(\mathscr{E})+c_2\psi_\delta(\mathscr{E})\\(c_1f(P)+c_2F(P))_\delta&=c_1f_\delta(P)+c_2F_\delta(P)。\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

現在証明，如果 $\delta'>\delta$，那末

$$(\varphi_\delta(\mathscr{E}))_{\delta'}=\varphi_\delta(\mathscr{E})。 \tag{98}$$

在 δ' 中每个 $\mathscr{E}_k$ 又分割成几个集合 $\mathscr{E}'_{k,s}$，而依 (92)，

$$a_k=\frac{\varphi_\delta(\mathscr{E}'_{k,s})}{G(\mathscr{E}'_{k,s})}=\frac{\varphi(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)},$$

由此可知

$$\begin{aligned}(\varphi_\delta(\mathscr{E}))_{\delta'}&=\int_{\mathscr{E}}\sum_{k,s}a_k\omega_{\mathscr{E}'_{k,s}}(P)G(d\mathscr{E})=\\&=\int_{\mathscr{E}}\sum_k a_k\sum_s\omega_{\mathscr{E}'_{k,s}}(P)G(d\mathscr{E})=\\&=\int_{\mathscr{E}}\sum_k a_k\omega_{\mathscr{E}_k}(P)G(d\mathscr{E})=\varphi_\delta(\mathscr{E})。\end{aligned}$$

如果 c 是 a_k 中的最大者，那末依 (90)，$|\psi(\mathscr{E})|\leqslant cG(\mathscr{E})$，就是說，凡片段定值的集合函数必是基本上有界的。注意，我們只就分 $\mathscr{E}_0$ 成有穷多部分集合的分割而考察片段定値函数。

設 $\delta'>\delta$，而 $\mathscr{E}'_{k,s}$ 是上面說过的那些部分集合。由 $\varphi_\delta(\mathscr{E})$ 的定义可知

$$\frac{\varphi_\delta(\mathscr{E}'_{k,s})}{G(\mathscr{E}'_{k,s})}=\frac{\varphi_\delta(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)};\quad \varphi_\delta(\mathscr{E}_k)=\varphi(\mathscr{E}_k),$$

因此

$$S_{\delta'}(\varphi_\delta)=\sum_{k,s}\frac{\varphi_\delta^2(\mathscr{E}'_{k,s})}{G(\mathscr{E}'_{k,s})}=\sum_{k,s}\frac{\varphi_\delta(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\varphi_\delta(\mathscr{E}'_{k,s})=$$

$$=\sum_k\frac{\varphi_\delta(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\cdot\varphi_\delta(\mathscr{E}_k)=\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)},$$

就是說

$$S_{\delta'}(\varphi_\delta)=S_\delta(\varphi)。\tag{99}$$

如果 $S_{\delta_n}(\varphi_\delta)\to\|\varphi_\delta\|_2$，那末当 $\delta'_n=\delta_n\delta$ 时，$S_{\delta'_n}(\varphi_\delta)\to\|\varphi_\delta\|_2$。但 $\delta'_n\geqslant\delta$，依(99)，$S_{\delta'_n}(\varphi_\delta)=S_\delta(\varphi)$，而这与 n 无关。由此可得

$$\|\varphi_\delta\|_2=S_\delta(\varphi)。\tag{100}$$

如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_2$，那末必有分割序列 $\delta^{(n)}$ 存在，使 $S_{\delta^{(n)}}(\varphi)\to\|\varphi\|_2$，所以存在一分割序列，使

$$\|\varphi_{\delta^{(n)}}\|_2\to\|\varphi\|_2。\tag{101}$$

把(100)不难表示成积分。設 $g_\delta(P)$ 是对于片段定值函数 $\varphi_\delta(\mathscr{E})$ 的积分(91)中积分号下的函数：

$$g_\delta(P)=a_k=\varphi(\mathscr{E}_k):G(\mathscr{E}_k),\quad 如果\quad P\in\mathscr{E}_k。$$

那末

$$\varphi_\delta^2(\mathscr{E}_k)=\varphi^2(\mathscr{E}_k)=a_k^2G^2(\mathscr{E}_k)=G(\mathscr{E}_k)\int_{\mathscr{E}_k}g_\delta^2(P)G(d\mathscr{E}),$$

所以

$$S_\delta(\varphi)=\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}=\sum_k\int_{\mathscr{E}_k}g_\delta^2(P)G(d\mathscr{E}),$$

就是說

$$S_\delta(\varphi)=\|\varphi_\delta\|_2=\int_{\mathscr{E}_0}g_\delta^2(P)G(d\mathscr{E}),\tag{102}$$

而应用 L_2 中范数的平常表示法，可以写成

$$\|\varphi_\delta\|_2=\|g_\delta(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}。\tag{103}$$

还要介紹在下面須要用的两个公式。依(98)，$[\varphi(\mathscr{E})-\varphi_\delta(\mathscr{E})]_{\delta'}=$ $=\varphi_{\delta'}(\mathscr{E})-\varphi_\delta(\mathscr{E})$，如果 $\delta'\geqslant\delta$。差 $g_{\delta'}(P)-g_\delta(P)$ 在分割 δ' 的部

分集合 $\mathscr{E}'_{k,s}$ 的点上保持定值，并且是对于 $\varphi_{\delta'}(\mathscr{E})-\varphi_\delta(\mathscr{E})$ 的公式(91)中积分号下的函数，就是説

$$\varphi_{\delta'}(\mathscr{E})-\varphi_\delta(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}_0}[g_{\delta'}(P)-g_\delta(P)]G(d\mathscr{E}),$$

而依(103)可以写成：

$$\|(\varphi-\varphi_\delta)_{\delta'}\|_2=\|\varphi_{\delta'}-\varphi_\delta\|_2=\|g_{\delta'}(P)-g_\delta(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}。\quad(104)$$

最后一公式是关于函数 $g_{\delta'}(P)$ 的。它在 $\mathscr{E}'_{k,s}$ 的点上保持定值 $a'_{k,s}=\varphi(\mathscr{E}'_{k,s}):G(\mathscr{E}'_{k,s})$，而依 $f_\delta(P)$ 的定义，函数 $(g_{\delta'}(P))_\delta$ 在 $\mathscr{E}_k$ 的点处取定值

$$\frac{1}{G(\mathscr{E}_k)}\sum_s\int_{\mathscr{E}_{k,s}}\frac{\varphi(\mathscr{E}'_{k,s})}{G(\mathscr{E}'_{k,s})}G(d\mathscr{E})=$$

$$=\frac{1}{G(\mathscr{E}_k)}\sum_s\frac{\varphi(\mathscr{E}'_{k,s})}{G(\mathscr{E}'_{k,s})}\cdot G(\mathscr{E}'_{k,s})=\frac{\varphi(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)},$$

就是説

$$(g_{\delta'}(P))_\delta=g_\delta(P)。\quad(105)$$

82. 輔助命題(續)　現在介紹一新概念，这对下面很重要。設 $\varphi(\mathscr{E})$ 及 $\psi(\mathscr{E})\in V_1$，而 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个分割，分成两互无公点的部分集合。用 $\inf[\varphi,\psi]$ 表示对于 $\mathscr{E}$ 的一切可能分割和 $\varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}'')$ 的下确界：

$$\inf[\varphi,\psi]=\inf_{\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''}[\varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}'')]=\omega(\mathscr{E}),\quad(106)$$

就是説，

$$\varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}'')\geqslant\omega(\mathscr{E}),\quad(107)$$

而对于任意預定的正数 ε，必存在一分割 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''$，使

$$\varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}'')<\omega(\mathscr{E})+\varepsilon。\quad(108)$$

对于 L_G 中的任意 $\mathscr{E}$，函数 $\omega(\mathscr{E})$ 总是取有穷值，因为 $\varphi(\mathscr{E}')$ 及 $\psi(\mathscr{E}'')$ 是有界的。如果取 $\mathscr{E}'$ 做 $\mathscr{E}$，而取 $\mathscr{E}''$ 为空集合，或反之，则得

$$\omega(\mathscr{E})\leqslant\varphi(\mathscr{E});\quad\omega(\mathscr{E})\leqslant\psi(\mathscr{E})。\quad(109)$$

現在証明 $\omega(\mathscr{E})$ 是完全加法的。設 $\mathscr{E}$ 分割成有穷多或可数无穷多部分集合 $\mathscr{E}_k$（两两无公点）。那末

$$\varphi(\mathscr{E})=\sum_k \varphi(\mathscr{E}_k);\quad \psi(\mathscr{E})=\sum_k \psi(\mathscr{E}_k),$$

而上面的級数是絕对收斂的。依(109)，正項 $\omega(\mathscr{E}_k)$ 組成一收斂級数，因为以 $\varphi(\mathscr{E}_k)$ 及 $\psi(\mathscr{E}_k)$ 为項的級数絕对收斂，因此由 $\omega(\mathscr{E}_k)$ 組成的整个級数有一与各項次序无关的确定和 [I; 134]。設 $\varepsilon>0$ 是預定的。存在一分割 $\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''$，使

$$\varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}'')\geqslant\omega(\mathscr{E}),\quad \varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}'')\leqslant\omega(\mathscr{E})+\varepsilon。\tag{110}$$

令 $\mathscr{E}'_k=\mathscr{E}_k\mathscr{E}'$，$\mathscr{E}''_k=\mathscr{E}_k\mathscr{E}''$，因而

$$\mathscr{E}'_k+\mathscr{E}''_k=\mathscr{E}_k;\quad \sum_k \mathscr{E}'_k=\mathscr{E}';\quad \sum_k \mathscr{E}''_k=\mathscr{E}''。$$

应用 $\omega(\mathscr{E})$ 的定义，可以写成 $\varphi(\mathscr{E}'_k)+\psi(\mathscr{E}''_k)\geqslant\omega(\mathscr{E}_k)$，而依 k 取和，依 $\varphi(\mathscr{E})$ 及 $\psi(\mathscr{E})$ 的完全加法性，可得

$$\sum_k \omega(\mathscr{E}_k)\leqslant\varphi(\mathscr{E}')+\psi(\mathscr{E}''),$$

而由(110)的第二不等式可得

$$\sum_k \omega(\mathscr{E}_k)\leqslant\omega(\mathscr{E})+\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，可得

$$\sum_k \omega(\mathscr{E}_k)\leqslant\omega(\mathscr{E})。\tag{111}$$

現在証明相反的不等式。取分割 $\mathscr{E}_k=\mathscr{E}_{k,1}+\mathscr{E}_{k,2}$，使下面不等式滿足：

$$\varphi(\mathscr{E}_{k,1})+\psi(\mathscr{E}_{k,2})<\omega(\mathscr{E}_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}。\tag{112}$$

依 k 取和，用 $\mathscr{E}_1$ 表 $\mathscr{E}_{k,1}$ 的和，用 $\mathscr{E}_2$ 表 $\mathscr{E}_{k,2}$ 的和，可得：

$$\varphi(\mathscr{E}_1)+\psi(\mathscr{E}_2)\leqslant\sum_k \omega(\mathscr{E}_k)+\varepsilon,\tag{113}$$

其中 $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2=0$，$\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=\mathscr{E}$。但 $\varphi(\mathscr{E}_1)+\psi(\mathscr{E}_2)\geqslant\omega(\mathscr{E})$（依 $\omega(\mathscr{E})$ 的定义），所以由不等式(113)可得

$$\omega(\mathscr{E})\leqslant\sum_k \omega(\mathscr{E}_k)+\varepsilon,$$

既然 ε 是任意的，可得与 (111) 相反的不等式，由此可知 $\omega(\mathscr{E})$ 是完全加法的：

$$\omega(\mathscr{E})=\sum_k\omega(\mathscr{E}_k)。$$

如此，由公式(106)定义的 $\omega(\mathscr{E})$ 也屬于 V_1。

再对于 V_1 中的任意 $\varphi(\mathscr{E})$ 引用下面的表示法：

$$\varphi_n(\mathscr{E})=\inf[\varphi, nG]。\tag{114}$$

留意 $G(\mathscr{E})\geqslant 0$，可以得知，$\varphi_{n+1}(\mathscr{E})\geqslant\varphi_n(\mathscr{E})$，此外，依 (109)，$\varphi_n(\mathscr{E})\leqslant\varphi(\mathscr{E})$。如此，对于任意含于 $\mathscr{E}_0$ 中的 $\mathscr{E}$，当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 序列有有穷極限。再提醒絕对連續性的定义：

$\varphi(\mathscr{E})$ 叫做在 $\mathscr{E}_0$ 上絕对連續的，是指对于任意預定的正数 ε，必存在一正数 η，使当 $G(\mathscr{E})\leqslant\eta$, $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_0$，而 $\mathscr{E}$ 屬于 L_G 时，$|\varphi(\mathscr{E})|\leqslant\varepsilon$。

輔助定理 1. 如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 是在 $\mathscr{E}_0$ 上絕对連續的，那末对于任意屬于 L_G 而含于 $\mathscr{E}_0$ 中的 $\mathscr{E}$，$\varphi_n(\mathscr{E})\to\varphi(\mathscr{E})$。

設 $\varepsilon>0$ 是預定的。对于某一分割 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_n'+\mathscr{E}_n''$，依 (108)，可知

$$\varphi(\mathscr{E}_n')+nG(\mathscr{E}_n'')<\varphi_n(\mathscr{E})+\varepsilon\leqslant\varphi(\mathscr{E})+\varepsilon。\tag{115}$$

但依定理 1[72]，$\varphi(\mathscr{E}_n')\geqslant l$，而 l 是一确定数，而由(115)可知

$$G(\mathscr{E}_n'')<\frac{\varphi(\mathscr{E})+\varepsilon-l}{n},\tag{116}$$

其中右边对于足够大的 n 必 $\leqslant\eta$，由此，依 $\varphi(\mathscr{E})$ 的絕对連續性，可知 $|\varphi(\mathscr{E}_n'')|\leqslant\varepsilon$ 对于一切足够大的 n 成立。由 (115) 的第一不等式可知 $\varphi(\mathscr{E}_n')\leqslant\varphi_n(\mathscr{E})+\varepsilon$。但 $\varphi(\mathscr{E}_n')=\varphi(\mathscr{E})-\varphi(\mathscr{E}_n'')$，所以 $\varphi(\mathscr{E})\leqslant\varphi_n(\mathscr{E})+\varepsilon+\varphi(\mathscr{E}_n'')$，而依 $|\varphi(\mathscr{E}_n'')|\leqslant\varepsilon$，可知 $\varphi(\mathscr{E})-\varphi_n(\mathscr{E})\leqslant 2\varepsilon$。既然 ε 是任意的，所以 $\varphi_n(\mathscr{E})\to\varphi(\mathscr{E})$。

輔助定理 2. 对于非負的完全加法函数 $\varphi(\mathscr{E})$，$\varphi_n(\mathscr{E})$ 的極限是在 $\mathscr{E}_0$ 上絕对連續的完全加法函数。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\mathscr{E})=\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$。留意 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 是完全加法的，非負的；由[64]中的輔助定理可知 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$ 是完全加法的。由(109)可知 $0\leqslant\varphi_n(\mathscr{E})\leqslant nG(\mathscr{E})$，因此每个 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 是絕对連續的。又由不等式 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}_0-\mathscr{E})\geqslant\varphi_n(\mathscr{E}_0-\mathscr{E})$，其中 $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_0$，可知 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}_0)-\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})\geqslant\varphi_n(\mathscr{E}_0)-\varphi_n(\mathscr{E})$，就是

$$0\leqslant\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})-\varphi_n(\mathscr{E})\leqslant\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}_0)-\varphi_n(\mathscr{E}_0)。\qquad(117)$$

由此可以看出对于 $\mathscr{E}_0$ 中的一切 $\mathscr{E}$，$\varphi_n(\mathscr{E})$ 一致收斂于 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$。留意 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 的絕对連續性，可知 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上也是絕对連續的。事实上，設 ε 是預定的正数。可以固定 $n=n_0$，使 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}_0)-\varphi_{n_0}(\mathscr{E}_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。如此，依(117)，可知 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})\leqslant\varphi_{n_0}(\mathscr{E})+\frac{\varepsilon}{2}$。既然 $\varphi_{n_0}(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，必存在一正数 η，使当 $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_0$ 而 $G(\mathscr{E})\leqslant\eta$ 时，$\varphi_{n_0}(\mathscr{E})\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。于是由上面不等式得：如果 $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_0$，$G(\mathscr{E})\leqslant\eta$，則 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})\leqslant\varepsilon$，而輔助定理証明了。

輔助定理 3. 如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_1$，并且是非負的，在 $\mathscr{E}_0$ 上絕对連續的，那末对于任意預定的 $\varepsilon>0$，必存在一基本上有界函数 $\psi(\mathscr{E})$，使

$$\|\varphi-\psi\|_1\leqslant\varepsilon。\qquad(118)$$

由(109)可知 $0\leqslant\varphi_n(\mathscr{E})\leqslant nG(\mathscr{E})$，就是說每个 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 是基本上有界的。此外，$\varphi(\mathscr{E})-\varphi_n(\mathscr{E})\geqslant0$，所以这差在 $\mathscr{E}_0$ 上的全变分等于其在 $\mathscr{E}_0$ 处的值，就是說 $\|\varphi(\mathscr{E})-\varphi_n(\mathscr{E})\|_1=\varphi(\mathscr{E}_0)-\varphi_n(\mathscr{E}_0)$。但既然 $\varphi(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，依輔助定理 1 可知 $\varphi_n(\mathscr{E}_0)\to\varphi(\mathscr{E}_0)$，就是說 $\|\varphi(\mathscr{E})-\varphi_n(\mathscr{E})\|_1\to0$，所以为了滿足不等式(118)，只須取 $\psi(\mathscr{E})$ 等于一个与足够大的 n 值相应的 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 就可以了。事实上，可以取某一在 $\mathscr{E}_0$ 上片段定值的函数做 $\psi(\mathscr{E})$ 以滿足不等式(118)。首先对于 V_2 中的函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 証明这点。

定理 1. 如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_2$，那末对于任意預定的 $\varepsilon>0$，必存

在一片段定值的函数 $\omega(\mathscr{E})$，滿足

$$\|\varphi-\omega\|_2\leqslant\varepsilon_{\circ} \tag{119}$$

設 $f(P)$ 是在 $\mathscr{E}_0$ 上的 L_2 中的可测函数，而

$$a=\frac{1}{G(\mathscr{E})}\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E}),$$

如果 $G(\mathscr{E})=0$ 时这式算做等于零。显然

$$\int_{\mathscr{E}}[f(P)-a]^2G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}f^2(P)G(d\mathscr{E})-a^2G(\mathscr{E})_{\circ}$$

在这式中令 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_k$，而 $a=\int_{\mathscr{E}_k}f(P)G(d\mathscr{E}):G(\mathscr{E}_k)$，其中 $\mathscr{E}_k$ 是集合 $\mathscr{E}_0$ 在某分割 δ 中的部分集合，并依 k 取和，可得

$$\|f(P)-f_\delta(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}=\|f(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}-\|f_\delta(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}。 \tag{120}$$

如果 $\delta'>\delta$，取 $f(P)=g_{\delta'}(P)$，而 $g_\delta(P)$ 是出現于公式(102)中的函数，那末依(105)，$f_\delta(P)=g_\delta(P)$，而从(120)可得

$$\|g_{\delta'}(P)-g_\delta(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}=\|g_{\delta'}(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}-\|g_\delta(P)\|^2_{\mathscr{E}_0}。 \tag{121}$$

留意(103)及(104)，可以写成：

$$\|(\varphi-\varphi_\delta)_{\delta'}\|_2=\|\varphi_{\delta'}\|_2-\|\varphi_\delta\|_2。 \tag{122}$$

依(101)存在分割序列 δ_n 及 δ_n'，使 $\|(\varphi-\varphi_\delta)_{\delta_n}\|_2\to\|\varphi-\varphi_\delta\|_2$，而 $\|\varphi_{\delta_n'}\|_2\to\|\varphi\|_2$。对于序列 $\delta_n''=\delta_n\delta_n'$ 可知 $\|(\varphi-\varphi_\delta)_{\delta_n''}\|_2\to\|\varphi-\varphi_\delta\|_2$，$\|\varphi_{\delta_n''}\|_2\to\|\varphi\|_2$。在(122)中令 $\delta'=\delta_n''$，并取極限，得

$$\|\varphi-\varphi_\delta\|_2=\|\varphi\|_2-\|\varphi_\delta\|_2。 \tag{123}$$

留意(101)可知存在一分割 δ，使(123)中的右边 $\leqslant\varepsilon$，于是令 $\omega(\mathscr{E})=\varphi_\delta(\mathscr{E})$ 可得(119)。

定理 2. 如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_1$，并且在 $\mathscr{E}_0$ 上絶对連續，那末对于任意預定的正数 ε，必有一在 $\mathscr{E}_0$ 上的片段定值函数 $\omega(\mathscr{E})$ 存在，使

$$\|\varphi-\omega\|_1\leqslant\varepsilon。 \tag{124}$$

可以把 φ 表成两个 V_1 中的非負函数之差的形式：$\varphi(\mathscr{E})=\varphi_1(\mathscr{E})-$

$-\varphi_2(\mathscr{E})$，而如果存在片段定值函数 $\omega_1(\mathscr{E})$ 及 $\omega_2(\mathscr{E})$，使 $\|\varphi_1-\omega_1\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$\|\varphi_2-\omega_2\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，那末 $\omega(\mathscr{E})=\omega_1(\mathscr{E})+\omega_2(\mathscr{E})$ 也是片段定值函数，并且满足（依(85)）

$$\|\varphi-\omega\|_1\leqslant\|\varphi_1-\omega_1\|_1+\|\varphi_2-\omega_2\|_1\leqslant\varepsilon,$$

如此，只須就非負函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 的情形証明本定理就够了。

依輔助定理 3，必存在一基本上有界的函数 $\psi(\mathscr{E})$，使 $\|\varphi-\psi\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。函数 $\psi(\mathscr{E})\in V_2$[81]，所以存在一片段定值的函数 $\omega(\mathscr{E})$，使 $\|\psi-\omega\|_2\leqslant\frac{\varepsilon^2}{4G(\mathscr{E}_0)}$。依 (88)，$\|\psi-\omega\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，而应用 (85)，可以写成

$$\|\varphi-\omega\|_1\leqslant\|\varphi-\psi\|_1+\|\psi-\omega\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

于是定理証明了。

定理 1 的結論等于說：在 V_2 中取 $\|\varphi\|_2$ 为范数，则片段定值函数是到处稠密的，而定理 2 等于說：在 V_1 中的絕对連續函数的空間中，如取 $\|\varphi\|_1$ 为范数，則片段定值函数在其中到处稠密。

83. 基本定理 現在回头証明在[73]中陈述的基本定理。与上面一样，只須就 V_1 中的非負函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 的情形証明定理就够了。与以前一样，用 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$ 表示由 (114) 定义的函数 $\varphi_n(\mathscr{E})$ 的極限。依輔助定理 1 及 2，为了等式 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E})$ 成立，必須且只須 $\varphi(\mathscr{E})$ 是在 $\mathscr{E}_0$ 上絕对連續的。設这点不成立。作在 $\mathscr{E}_0$ 中非負完全加法函数

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E})=\varphi(\mathscr{E})-\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})。\tag{125}$$

我們将証明 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E})$ 是[73]中(14)里面的那一特异項。令

$$\varphi_n^{(s)}(\mathscr{E})=\inf[\varphi^{(s)},nG]=\inf_{\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''}[\varphi(\mathscr{E}')-\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}')+nG(\mathscr{E}'')]。\tag{126}$$

取满足条件 (115) 及不等式 (116) 的分割 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_n'+\mathscr{E}_n''$，依此当 $n\to\infty$ 时 $G(\mathscr{E}_n'')\to 0$ 。留意定义(126)可知

$$\varphi_n^{(s)}(\mathscr{E}) \leqslant \varphi(\mathscr{E}'_n) + nG(\mathscr{E}''_n) - \varphi^{(ac)}(\mathscr{E}'_n) =$$
$$= \varphi(\mathscr{E}'_n) + nG(\mathscr{E}''_n) - [\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathscr{E}''_n)],$$

就是說，依(115)，

$$\varphi_n^{(s)}(\mathscr{E}) \leqslant \varphi_n(\mathscr{E}) + \varepsilon - [\varphi^{(ac)}(\mathscr{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathscr{E}''_n)]。$$

但既然 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，可知对于一切足够大的n，$0 \leqslant \varphi^{(ac)}(\mathscr{E}''_n) \leqslant \varepsilon$，所以

$$\varphi_n^{(s)}(\mathscr{E}) \leqslant \varphi_n(\mathscr{E}) - \varphi^{(ac)}(\mathscr{E}) + 2\varepsilon。$$

留意 $\varphi_n(\mathscr{E}) \to \varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^{(s)}(\mathscr{E}) \leqslant 2\varepsilon$，而既然 ε 是任意的，可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^{(s)}(\mathscr{E}) = 0$ 对于一切 $\mathscr{E}$ 成立。但 $\varphi_n^{(s)}(\mathscr{E})$ 是非負的，并且当 n 增加时是不減的，因此对于一切 n，

$$\varphi_n^{(s)}(\mathscr{E}) = \inf_{\mathscr{E}=\mathscr{E}'+\mathscr{E}''} [\varphi^{(s)}(\mathscr{E}') + nG(\mathscr{E}'')] = 0。$$

把这結果就 $n=1$ 应用于 $\mathscr{E}_0$ 上去，可知对于任意預定的正数 ε 必存在一屬于 L_G 并含于 $\mathscr{E}_0$ 中的集合 $\mathscr{E}_n$，使

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_n) + G(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n},$$

由此，依 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E})$ 及 $G(\mathscr{E})$ 的非負性可知

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad G(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}。 \tag{127}$$

作集合 $\mathscr{E}'_\varepsilon = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \cdots$，这集合也屬于 L_G，并含于 $\mathscr{E}_0$ 中。留意 $\mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}'_\varepsilon$ 对于任意 n 成立，可知 $G(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}'_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$，而使 n 增向无穷，得 $G(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}'_\varepsilon) = 0$。另一方面，留意

$$\mathscr{E}'_\varepsilon = \mathscr{E}_1 + (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1) + (\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) + \cdots,$$

及(127)的第一不等式；而且因为 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E})$ 是非負的，可得 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E}'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$。所以

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E}'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \quad G(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}'_\varepsilon) = 0。$$

令 $\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}'_\varepsilon = \mathscr{E}_\varepsilon$，可知对于任意 $\varepsilon > 0$，必存在一含于 $\mathscr{E}_0$ 的集合

$\mathscr{E}_\varepsilon$，使

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_0-\mathscr{E}_\varepsilon)\leqslant\varepsilon,\quad G(\mathscr{E}_\varepsilon)=0。$$

設 $\varepsilon_n>0$，而 $\varepsilon_n\to 0$。那末

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_0-\mathscr{E}_{\varepsilon_n})\leqslant\varepsilon_n,\quad G(\mathscr{E}_{\varepsilon_n})=0。$$

取集合 $H=\mathscr{E}_{\varepsilon_1}+\mathscr{E}_{\varepsilon_2}+\cdots$。由于上列的第二不等式，可知 $G(H)=0$，而留意 $\mathscr{E}_{\varepsilon_n}\subset H$ 对于任意 n 成立，依第一不等式 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_0-H)\leqslant\varepsilon_n$，于是无限增大 n 可得 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_0-H)=0$。因此，存在 H，使

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E}_0-H)=0,\quad G(H)=0。\tag{128}$$

任意 $\mathscr{E}=\mathscr{E}H+(\mathscr{E}-\mathscr{E}H)$，但 $\mathscr{E}-\mathscr{E}H\subseteq\mathscr{E}_0-H$，而由公式(128)中的第一个及 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E})$ 的非負性可知 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E}-\mathscr{E}H)=0$，所以 $\varphi^{(s)}(\mathscr{E})=\varphi^{(s)}(\mathscr{E}H)$。从而存在 H，使

$$\varphi^{(s)}(\mathscr{E})=\varphi^{(s)}(\mathscr{E}H),\quad 而\quad G(H)=0。$$

如此，$\varphi^{(s)}(\mathscr{E})$ 就是[73]中公式(14)里面的特异項。留意(125)并注意 $\varphi^{(ac)}(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，可知为了証明 [73] 中的定理只須証明下面定理就够了。

定理 凡 V_1 中的絕对連續函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 必可表成积分的形式：

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}f(P)G(d\mathscr{E}),\tag{129}$$

其中 $f(P)$ 是在 $\mathscr{E}_0$ 上可測且可和的。

依定理 2，必存在一片段定値函数 $\omega_n(\mathscr{E})$，使

$$\|\varphi-\omega_n\|_1<\frac{1}{2^{n+1}},\tag{130}$$

由此可知，依(85)，

$$\|\omega_{n+1}-\omega_n\|_1\leqslant\|\varphi-\omega_{n+1}\|_1+\|\varphi-\omega_n\|_1<\frac{1}{2^n}。$$

但任一 $\omega_n(\mathscr{E})$ 是一个在 $\mathscr{E}_0$ 上取有穷多个有穷値的片段定値函数 $g_n(P)$ 的积分 [81]：

$$\omega_n(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} g_n(P)G(d\mathscr{E}),$$

$$\omega_{n+1}(\mathscr{E})-\omega_n(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}[g_{n+1}(P)-g_n(P)]G(d\mathscr{E})。$$

这表成积分的集合函数的全变分乃是[73]:

$$\|\omega_{n+1}(\mathscr{E})-\omega_n(\mathscr{E})\|_1=\int_{\mathscr{E}_0}|g_{n+1}(P)-g_n(P)|G(d\mathscr{E}),$$

由此

$$\int_{\mathscr{E}_0}|g_{n+1}(P)-g_n(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant\frac{1}{2^n},\tag{131}$$

而由这些积分組成的級数收斂。如此在 $\mathscr{E}_0$ 上下面級数殆遍收斂:

$$|g_1(P)|+|g_2(P)-g_1(P)|+|g_3(P)-g_2(P)|+\cdots,\tag{132}$$

于是下面級数更是殆遍收斂的:

$$f(P)=g_1(P)+[g_2(P)-g_1(P)]+[g_3(P)-g_2(P)]+\cdots,$$

就是說,在 $\mathscr{E}_0$ 上殆遍 $g_n(P)\to f(P)$。依(131),級数(132)的和是在 $\mathscr{E}_0$ 上可和的函数。但 $|f(P)|\leqslant$ 这和,因此 $f(P)$ 也是可和的。于是

$$f(P)=g_n(P)+[g_{n+1}(P)-g_n(P)]+[g_{n+2}(P)-g_{n+1}(P)]+\cdots,$$

留意(131)可知对于 $\mathscr{E}_0$ 中的任意 $\mathscr{E}$:

$$\int_{\mathscr{E}}|f(P)-g_n(P)|G(d\mathscr{E})\leqslant\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots=\frac{1}{2^{n-1}},$$

由此直接可知对于一切 $\mathscr{E}$,

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(\mathscr{E})=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} g_n(P)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。$$

另一方面,由 $\mathscr{E}_0$ 上的全变分的定义及(130)可知

$$|\varphi(\mathscr{E})-\omega_n(\mathscr{E})|\leqslant\|\varphi-\omega_n\|_1\leqslant\frac{1}{2^{n+1}},$$

由此可知对于一切 $\mathscr{E}$, $\omega_n(\mathscr{E})\to\varphi(\mathscr{E})$, 就是說

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E}),$$

而定理証明了。到此为止我們假設 $G(\mathscr{E}_0)$ 等于有穷数。如果 $G(\mathscr{E}_0)=+\infty$,那末結果可借具有有穷 $G(\mathscr{E}_n)$ 值的集合 $\mathscr{E}_n$ 取極限而得出,因为关于后者定理已証明了,而且 $f(P)$ 与 n 无关。

84. 黑林格尔积分 现在更詳細地考察 V_2 的性質。首先注意,由条件(86)可知如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_2$,那末它是絕对連續的。同时,公式(123)成立:

$$\|\varphi-\varphi_\delta\|_2=\|\varphi\|_2-\|\varphi_\delta\|_2, \tag{133}$$

而此外[81],

$$\varphi_\delta(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} g_\delta(P)G(d\mathscr{E}),\quad \|\varphi_\delta\|_2=\int_{\mathscr{E}_0} g_\delta^2(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{134}$$

依(101)可以选擇 $\mathscr{E}_0$ 的分割序列,使

$$\|\varphi-\varphi_{\delta_n}\|_2=\|\varphi\|_2-\|\varphi_{\delta_n}\|_2\leqslant\frac{1}{4^{n+1}G(\mathscr{E}_0)}。 \tag{135}$$

如此,依(88),$\|\varphi-\varphi_{\delta_n}\|_1\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$,而依上节定理的証明可知 $g_{\delta_n}(P)\to f(P)$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上殆遍成立,而

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(P)G(d\mathscr{E})。 \tag{136}$$

由(134)及(135)可知

$$\int_{\mathscr{E}_0} g_{\delta_n}^2(P)G(d\mathscr{E})\leqslant\|\varphi\|_2,\quad \int_{\mathscr{E}_0} g_{\delta_n}^2(P)G(d\mathscr{E})\to\|\varphi\|_2。$$

应用[55]中的定理4可以写成

$$\int_{\mathscr{E}_0} f^2(P)G(d\mathscr{E})\leqslant\|\varphi\|_2, \tag{137}$$

由此可知 $f(P)\in\mathscr{E}_0$ 上的 L_2。现在証明与(137)相反的不等式。

应用舒伐尔兹不等式于(136),可以写成

$$\varphi^2(\mathscr{E}_k)\leqslant\int_{\mathscr{E}_k} f^2(P)G(d\mathscr{E})\cdot\int_{\mathscr{E}_k} G(d\mathscr{E})=G(\mathscr{E}_k)\int_{\mathscr{E}_k} f^2(P)G(d\mathscr{E})。$$

用 $G(\mathscr{E}_k)$ 除，并依 k 取和，可得

$$S_\delta(\varphi)=\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\leqslant\int_{\mathscr{E}_0}f^2(P)G(d\mathscr{E}),\tag{138}$$

因此取上面和的上确界可知

$$\|\varphi\|_2\leqslant\int_{\mathscr{E}_0}f^2(P)G(d\mathscr{E})。$$

与(137)比較可得

$$\|\varphi\|_2=\int_{\mathscr{E}_0}f^2(P)G(d\mathscr{E}).\tag{139}$$

于是証明了：对于 V_2 中的任意 $\varphi(\mathscr{E})$，出现于表示法(136)中的函数 $f(P)$ 屬于 L_2，而公式(139)成立。反之，如果知道 $\varphi(\mathscr{E})$ 由公式(136)表示，而 $f(P)\in\mathscr{E}_0$ 上的 L_2，那末由(138)［这是由(136)即可得出的］可知 $\varphi(\mathscr{E})\in V_2$。留意表示法(136)的唯一性，可知公式(139)成立。于是得出下面的重要定理：

定理 1. 为了 $\varphi(\mathscr{E})$ 屬于 $\mathscr{E}_0$ 上的 V_2，必須且只須 $\varphi(\mathscr{E})$ 能表示成(136)的形式，其中 $f(P)\in\mathscr{E}_0$ 上的 L_2。如果这条件果然满足，那末公式(139)成立。

再举出 $\varphi(\mathscr{E})$ 屬于 V_2 的另一必要且充分的条件。

定理 2. 为了 $\varphi(\mathscr{E})$ 屬于 $\mathscr{E}_0$ 上的 V_2，必須且只須存在一个在 $\mathscr{E}_0$ 上完全加法的函数 $H(\mathscr{E})$，使下面不等式满足：

$$\varphi^2(\mathscr{E})\leqslant G(\mathscr{E})\cdot H(\mathscr{E})。\tag{140}$$

事实上，如果这条件满足，那末和 $S_\delta(\varphi)$ 是有界的：

$$S_\delta(\varphi)=\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\leqslant\sum_k H(\mathscr{E}_k)=H(\mathscr{E}_0)。$$

反之，如果 $\varphi(\mathscr{E})\in V_2$，那末公式(136)成立，而 $f(P)\in\mathscr{E}_0$ 上的 L_2，所以在含于 $\mathscr{E}_0$ 且依 $G(\mathscr{E})$ 可测的任意集合上所作的 L_2 也包含 $f(P)$。設

$$H(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}f^2(P)G(d\mathscr{E})。\tag{141}$$

对于(136)使用舒伐尔兹不等式可得(140)，于是定理証明了。

如果 $\varphi(\mathscr{E})\in\mathscr{E}_0$ 上的 V_2，那末和 $S_\delta(\varphi)$ 的上确界叫做黑林格尔积分，并用下面方式表示：

$$\|\varphi\|_2=\sup_\delta S_\delta(\varphi)=\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi^2(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}。\tag{142}$$

由公式(139)可得一用勒贝格积分表示黑林格尔积分的方式：

$$\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi^2(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}=\int_{\mathscr{E}_0}f^2(P)G(d\mathscr{E})。\tag{143}$$

如果分割 δ' 是分割 δ 的后繼，而 i 是积分(142)，就是說 i 等于和 $S_\delta(\varphi)$ 的上确界，那末我們知道 $S_\delta(\varphi)\leqslant S_{\delta'}(\varphi)\leqslant i$。留意这点，可知积分(142)具有下列性質：对于任意預定的 $\varepsilon>0$，必有一分割 δ_ε 存在，使其任意后繼 δ' 都能满足下面不等式：

$$|i-S_{\delta'}(\varphi)|\leqslant\varepsilon\quad(\delta' \text{ 是 } \delta_\varepsilon \text{ 的后繼})。\tag{144}$$

現在証明具有上述性質的 i 只能是唯一的。設还有一个具有这性質的数 i'。除(144)之外，还有对于任意 $\delta\geqslant\delta_\varepsilon'$，$|i'-S_\delta(\varphi)|\leqslant\varepsilon$，其中 δ_ε' 起着(144)中的 δ_ε 的作用。取积 $\delta_\varepsilon''=\delta_\varepsilon\delta_\varepsilon'$，可以得两个不等式：

$$\text{当 } \delta\geqslant\delta_\varepsilon'' \text{ 时 } |i-S_\delta(\varphi)|\leqslant\varepsilon,\ |i'-S_\delta(\varphi)|\leqslant\varepsilon。$$

对于满足条件 $\delta>\delta_\varepsilon''$ 的任一分割 δ，依 $i'-i=(i'-S_\delta(\varphi))+(S_\delta(\varphi)-i)$ 可得：

$$|i'-i|\leqslant|i'-S_\delta(\varphi)|+|i-S_\delta(\varphi)|\leqslant2\varepsilon,$$

由此，既然 ε 是任意的，可知 $i'=i$。設 $\varphi(\mathscr{E})$ 及 $\varphi_1(\mathscr{E})\in V_2$；考察和

$$S_\delta(\varphi,\varphi_1)=\sum_k\frac{\varphi(\mathscr{E}_k)\varphi_1(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)},\tag{145}$$

这显然可以表示成下面形式：

$$S_\delta(\varphi,\varphi_1)=\frac{1}{2}\sum_k\frac{[\varphi(\mathscr{E}_k)+\varphi_1(\mathscr{E}_k)]^2}{G(\mathscr{E}_k)}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}-\frac{1}{2}\sum_k\frac{\varphi_1^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)},\tag{146}$$

就是說

$$S_\delta(\varphi,\varphi_1)=\frac{1}{2}S_\delta(\varphi+\varphi_1)-\frac{1}{2}S_\delta(\varphi)-\frac{1}{2}S_\delta(\varphi_1)。$$

对于右边的每个和，性質(144)都成立，又因为必要时可以用几个分割的积替换各个分割，所以可設所取的 δ 是同一个。如此和 $S_\delta(\varphi,\varphi_1)$ 也有性質(144)；而与和(145)相应的数 i 表成

$$i=\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi(d\mathscr{E})\varphi_1(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}。\tag{147}$$

留意(146)，可以写成

$$\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi(d\mathscr{E})\varphi_1(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}=\frac{1}{2}\int_{\mathscr{E}_0}\frac{[\varphi(d\mathscr{E})+\varphi_1(d\mathscr{E})]^2}{G(d\mathscr{E})}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi^2(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}-\frac{1}{2}\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi_1^2(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})},$$

而再留意(143)，可知

$$\int_{\mathscr{E}_0}\frac{\varphi(d\mathscr{E})\varphi_1(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}=\int_{\mathscr{E}_0}f(P)f_1(P)G(d\mathscr{E}),\tag{148}$$

其中 $f_1(P)$ 是 L_2 中与 $\varphi_1(\mathscr{E})$ 相应的函数：

$$\varphi_1(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}f_1(P)G(d\mathscr{E})。\tag{149}$$

更一般形式的和

$$\sigma_\delta=\sum_k u(P_k)\frac{\varphi(\mathscr{E}_k)\varphi_1(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\tag{150}$$

也可以同样研究，其中 $u(P)$ 是有界并依 $G(\mathscr{E})$ 可测的函数，而 P_k 是 $\mathscr{E}_k$ 中任意一点。可以証明，对于这样的和也必有唯一的具有性質(144)的数 I 存在，但这时(144)中的 S_δ 須換成 σ_δ，而且(144)中的不等式对于任意选擇的 P_k 点都滿足。这数 I 可以表示成勒貝格-斯提勒杰斯积分：

$$I=\int_{\mathscr{E}_0}u(P)f(P)f_1(P)G(d\mathscr{E})。\tag{151}$$

性質(144)是下面将講到的积分一般定义的基础。在下节中将更

詳尽地考察一个变数的情形。

85. **一个变数的情形** 在研究一个变数的情形中,我們将从点函数出發,并考察連續函数的最簡單的情形。为简便起見将使用下面的表示法:如果 Δ 是某一区間$[\alpha,\beta]$,那末記号 $\Delta\tau(x)$ 将表示差值 $\tau(\beta)-\tau(\alpha)$。設 $g(x)$ 是在有穷区間$[a,b]$上的不減連續函数,而 $F(x)$ 是在这区間上的连續函数,并具有下面性質,即当 $\Delta g(x)=0$ 时 $\Delta F(x)=0$。設 δ 是区間$[a,b]$的一分割,分这区間为有穷多个部分区間 Δ_k,而且

$$S_\delta=\sum_k\frac{(\Delta_kF)^2}{\Delta_kg}。\tag{152}$$

凡具有 0:0 形式的項算做零。当添加新分割点时这和是不減的[参見 87]。我們只使用分成区間的分割,而且在証明定理时与分割成依 $G(\mathscr{E})$ 可測的集合时一样地推理。

定理 1. 为了和 S_δ 的值的集合有界,必須且只須存在一个在$[a,b]$上不減的有界函数 $h(x)$,使对于$[a,b]$的任意部分区間下面不等式都成立:

$$(\Delta F)^2\leqslant\Delta g\cdot\Delta h。\tag{153}$$

如果这条件滿足,那末和 S_δ 中的諸項不超过 Δ_kh,而对于任意分割,$S_\delta\leqslant h(b)-h(a)$。

現在証明(153)的必要性。如果和 S_δ 在整个区間$[a,b]$上有界,那末在其任意一个部分区間上也有界。用 $h(x)$ 表示 S_δ 在区間$[a,x]$上的上确界:

$$h(x)=\sup_\delta S_\delta \text{ 在区間}[a,x]\text{上}。$$

与証明全变分的加法性完全一样,可以証明 S_δ 对于任意部分区間$[\alpha,\beta]$上的上确界等于 $h(\beta)-h(\alpha)=\Delta h$,所以 $h(x)$ 是不減有界函数。如果不把区間 Δ 分成部分区間,那末对于区間 Δ 作的和 S_δ 变成了單項的 $(\Delta F)^2:\Delta g$,而它小于和 S_δ 在 Δ 上的上确界

Δh，所以 $(\Delta F)^2:\Delta g\leqslant\Delta h$，于是得(153)。

設 $G(\mathscr{E})$ 是由函数 $g(x)$ 所产生的$[a, b]$上的区間函数，又設 $F(x)$ 具有下面形式：

$$F(x)=\int_a^x f(x)G(d\mathscr{E})+C, \tag{154}$$

其中 $f(x)\in L_2$。那末

$$\Delta F=\int_\Delta f(x)G(d\mathscr{E})=\int_\Delta f(x)dg(x),$$

而应用舒伐尔兹不等式，可得

$$(\Delta F)^2\leqslant\int_\Delta f^2(x)G(d\mathscr{E})\cdot\int_\Delta G(d\mathscr{E})=\Delta g(x)\cdot\int_\Delta f^2(x)G(d\mathscr{E}),$$

就是説条件(153)滿足，且

$$h(x)=\int_a^x f^2(x)G(d\mathscr{E}), \tag{155}$$

而由于 $g(x)$ 的連續性，区間$[a, x]$是閉与否并无关系。

公式(154)引出一个完全加法的集合函数

$$\varphi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(x)G(d\mathscr{E}),$$

这函数定义于一切依 $G(\mathscr{E})$ 可测并含于 $[a, b]$ 中的集合上，而 $\Delta F=\varphi(\Delta)$。和

$$\sum_k\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)} \tag{156}$$

有上确界 I，而 I 由公式(143)表示：

$$I=\int_a^b f^2(x)G(d\mathscr{E})。 \tag{157}$$

現在証明若只考虑分$[a, b]$为部分区間的分割，相应的和(152)的上确界也是这数 I。首先这上确界的值无論如何不会大于 I。利用 $\varphi(\mathscr{E})$ 的絕对連續性，可以証明积分(157)也是和(152)的上确界，虽然(152)中的分割只分 $[a, b]$ 成部分区間。依上面所說，对

于任意预定的正数 ε，必有一分割 δ 存在，它分区間 $[a, b]$ 成有穷多个可测集合 $\mathscr{E}_k(k=1, 2, \cdots, n)$，并使

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^2(\mathscr{E}_k)}{G(\mathscr{E}_k)}\geqslant I-\varepsilon, \tag{158}$$

其中 I 就是积分(157)。注意[38]中定理1的必要条件，可知对于任意 $\mathscr{E}_k$ 必存在一初等圖形 R_k，就是說有穷多个两两无公点的半开区間之和，滿足

$$R_k+e'_k=\mathscr{E}_k+e''_k \quad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{159}$$

其中 e'_k 及 e''_k 的测度是任意小的。諸集合 $\mathscr{E}_k$ 是两两无公点的，但由于 e''_k 的作用，諸 R_k 可能有公点，就是說 $R_kR_l\subset e''_ke''_l$，而这些公共部分的测度也是任意小的。在(159)的每个等式中，我們可以把 R_k 与其他 R_l 的公共部分归并到 e'_k 里去，并且注意这些公共部分也是可以表成有穷多半开区間之和。如果 η 是諸 e'_k 与 e''_k 的测度中的最大者，那末对于这些新的 e'_k，$G(e'_k)\leqslant(n+1)\eta$，因为 $G(R_kR_l)\leqslant G(e''_ke''_l)\leqslant\eta$。如此可設在諸等式(159)中諸 R_k 两两无公点，并且 e'_k 与 e''_k 的测度都是任意小的。

留意(158)，以及 $\varphi(\mathscr{E})$ 的絕对連續性，可取諸 e'_k 及 e''_k 的测度足够小，使

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^2(R_k)}{G(R_k)}\geqslant I-2\varepsilon。$$

設 $\Delta_s(s=1, 2, \cdots, m)$是組成諸 R_k 的一切部分区間。留意(87_1)，可得

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\varphi^2(\Delta_s)}{G(\Delta_s)}\geqslant I-2\varepsilon。\tag{160}$$

既然 $g(x)$ 及 $F(x)$ 是連續的，Δ_s 可以算做閉的也可算做开的区間。这些区間可能并不复盖 $[a, b]$，則补充上与其余区間相应的諸項。因为这些項是非負的，补充后之和更应滿足不等式(160)。既然 ε 是任意的，积分(157)必是在条件(154)之下和(152)的上确

界，但設(154)中的$f(x)\in L_2$。还要注意，因为$g(x)$依假設是連續的，由公式(155)定义的函数$h(x)$是連續的。

現在証明，如果条件(153)滿足，就是說和(152)有界，那末$F(x)$可以表成公式(154)形式，其中$f(x)\in L_2$。設Δ是$[a, b]$中的某区間，而Δ'_k是在其某分割中的諸部分区間。由(153)并依舒伐尔兹不等式可知：

$$\left(\sum_k |\Delta'_k F|\right)^2 \leqslant \left(\sum_k \sqrt{\Delta'_k h}\cdot\sqrt{\Delta'_k g}\right)^2 \leqslant \leqslant \sum_k \Delta'_k h\cdot\sum_k \Delta'_k g, \tag{161}$$

就是說

$$\left(\sum_k |\Delta'_k F|\right)^2 \leqslant \Delta g\cdot\Delta h\,。$$

对于任意分割取左边和的上确界，此上确界也滿足同样不等式，所以$F(x)$是囿变函数，而它的全变分$v(x)$滿足不等式

$$(\Delta v(x))^2 \leqslant \Delta g\cdot\Delta h\,。 \tag{162}$$

如果Δ'_k是$[a, b]$中任意不相复盖的一些区間，那末由(161)可得

$$\left(\sum_k |\Delta'_k F|\right)^2 \leqslant \sum_k \Delta'_k g\cdot[h(b)-h(a)]。$$

如果右边的和$\leqslant\varepsilon$，那末

$$\sum_k |\Delta'_k F| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{h(b)-h(a)},$$

而既然ε是任意的，可知$F(x)$依$g(x)$是絕对連續的，所以

$$F(x)=\int_a^x f(x)dg(x)+C\,。 \tag{163}$$

剩下的只是証明$f(x)\in L_2$。作有界函数如下：如果$|f(x)|\leqslant n$，令$f_n(x)=f(x)$，而当$f(x)>n$时令$f_n(x)=n$，当$f(x)<-n$时令$f_n(x)=-n$，并設

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(x)dg(x)。 \tag{164}$$

函数$f_n(x)\in L_2$，所以依上面所說的，

$$\sup_\delta \sum_k \frac{(\Delta_k F_n)^2}{\Delta_k g}=\int_a^b f_n^2(x)dg(x)。 \tag{165}$$

如果在$[a, b]$中依$g(x)$可测的諸不同集合$\mathscr{E}$上取积分(163),那末可得一集合函数,而它在$[a, x]$上的全变分可以表成积分[73]:

$$v(x)=\int_a^x f(x)\,|dg(x)|。\tag{166}$$

如果只分$[a, x]$成部分区間,那末对于函数(163)也得同样的全变分[75]。

留意(162),可知

$$\sup\sum_k \frac{(\Delta_k v)^2}{\Delta_k g}=M,\tag{167}$$

其中M是有穷数。另一方面,依(164)及(166),可知$|\Delta_k F_n|\leqslant\leqslant\Delta_k v$,而留意(165)及(167),可知对于任意$n$:

$$\int_a^b f_n^2(x)dg(x)\leqslant M,$$

由此可知$f(x)\in L_2$。由上面推理可得下面定理。

定理 2. 条件(153)与下面条件同效:即$F(x)$可以表成(163)的形式,其中$f(x)\in L_2$,而如果条件(153)满足,那末和(152)的上确界可以表成积分(157)的形式。

在上面所說的一切中都可以不假設$g(x)$及$F(x)$連續。这时基本区間須設成半开的,并且分割成的区間也須是半开的,而$\Delta g=g(\beta+0)-g(\alpha+0)$。上面一切結果仍有效,只是$h(x)$不一定是連續的。注意由条件(153)及$g(x)$的連續性可以將条件(153)中的$h(x)$取成連續的。

86. 黑林格尔积分的性質 和(152)的上确界是黑林格尔积分,可以与(142)相似地表示:

$$\int_a^b \frac{[dF(x)]^2}{dg(x)},\tag{168}$$

而关于这积分有下面公式成立:

$$\int_a^b \frac{[dF(x)]^2}{dg(x)}=\int_a^b f^2(x)dg(x)。\tag{169}$$

現在証明这积分就是无限地細分諸区間 Δ_k 时和(152)的極限。

定理 3. 如果 $F(x)$ 满足条件(153)，而 $F_1(x)$ 满足相类的条件

$$(\Delta F_1)^2 \leqslant \Delta g \cdot \Delta h_1, \tag{170}$$

($g(x)$ 是連續的)，那末和

$$\sum_k \frac{\Delta_k F \cdot \Delta_k F_1}{\Delta_k g} \tag{171}$$

当无限地細分諸区間 Δ_k 时有确定的極限，而和(152)的極限等于这些和的上确界，就是說等于积分(168)。

設与前面一样，I 是和(152)的上确界。对于預定的 $\varepsilon>0$，必存在一固定的分割 δ_0，它分 $[a, b]$ 成部分区間，并使 $S_{\delta_0} \geqslant I-\varepsilon$。設 δ 是一个足够精密的分割，使 δ 的每个部分区間至多含 δ_0 的一个分点，并使連續函数 $h(x)$ 在 δ 的每个部分区間之上的增量不大于 ε。对于 $\geqslant \delta_0$ 的分割 $\delta\delta_0$，

$$S_{\delta\delta_0} \geqslant S_{\delta_0} \geqslant I-\varepsilon。 \tag{172}$$

如果 p 是分割 δ_0 的分点数目，那末当由 δ 換成 $\delta\delta_0$ 时 δ 的部分区間中至多有 p 个分成两个部分区間，而这时和 S_δ 中的相应非負項換成和 $S_{\delta\delta_0}$ 中的两个非負項。依上面关于 $h(x)$ 的增量所說的以及性質(153)，这三項中的每一項不大于 ε，所以

$$0 \leqslant S_{\delta\delta_0} - S_\delta \leqslant 2p\varepsilon。$$

与(172)比較，可得 $S_\delta \geqslant I-(2p+1)\varepsilon$，由此，既然 ε 是任意的，可知当无限地細分諸部分区間 Δ_k 时和(152)趋向于 I。为了研究和(171)，留意 $F(x)+F_1(x)$ 由(163)形狀的公式表示，其中 $f(x)+f_1(x) \in L_2$，而和

$$\sum_k \frac{[\Delta_k(F+F_1)]^2}{\Delta_k g},$$

以及相类的关于 $F_1(x)$ 的和，当无限地細分諸 Δ_k 时有極限。由此可知和

$$\sum_k \frac{\Delta_k F \cdot \Delta_k F_1}{\Delta_k g} = \frac{1}{2}\sum_k \frac{[\Delta_k (F+F_1)]^2}{\Delta_k g} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g} - \frac{1}{2}\sum_k \frac{(\Delta_k F_1)^2}{\Delta_k g}$$

也有極限。如此可得下面的黑林格尔积分：

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(dF)^2}{dg} &= \lim \sum_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}, \\ \int_a^b \frac{dF dF_1}{dg} &= \lim \sum_k \frac{\Delta_k F \cdot \Delta_k F_1}{\Delta_k g}。 \end{aligned} \tag{173}$$

依[85]中所論的，

$$\int_a^b \frac{dF \cdot dF_1}{dg} = \int_a^b f(x) f_1(x) dg(x),$$

其中

$$F_1(x) = \int_a^x f_1(x)\, dg(x)。 \tag{174}$$

还可以考察更一般的和

$$\sum_k u(\xi_k) \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g} \tag{175}$$

及

$$\sum_k u(\xi_k) \frac{\Delta_k F \cdot \Delta_k F_1}{\Delta_k g}, \tag{176}$$

其中 $u(x)$ 是在 $[a, b]$ 中連續的，积分(173)存在，幷且 ξ_k 是 Δ_k 中的任意值。当无限地細分諸 Δ_k 时这些和也有确定的極限。只須对于和(175)証明就够了。考察和

$$\sum_k m_k \frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}, \tag{177}$$

其中 m_k 是連續函数 $u(x)$ 在閉区間 Δ_k 上的最小値。与上面完全一样，可以証明在添加新的分点时，这和不減，幷且当无限地細分諸 Δ_k 时这和有界，幷有确定的極限。$u(x)$ 既然是一致連續的，依条件(153)，当无限地細分諸区間 Δ_k 时，(175)及(177)两和之差

趋向于零，所以和(175)也有确定的極限。如此可得下面的黑林格尔积分：

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b u(x)\frac{(dF)^2}{dg}&=\lim\sum_k u(\xi_k)\frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g},\\ \int_a^b u(x)\frac{dF\cdot dF_1}{dg}&=\lim\sum_k u(\xi_k)\frac{\Delta_k F\cdot\Delta_k F_1}{\Delta_k g}。\end{aligned}\right\}\tag{178}$$

上面的理論也可以就 $g(x)$ 是間断函数的情形来考察。如果 δ_n 是一序列分割，其中 Δ_k 的長中最大者趋向于零，而 $g(x)$ 的每个間断点是从某一标号 n 以后一切 δ_n 的分点，那末上面的和对于这一序列分割有确定的極限[見 18]。

当 $F(x)$，$F_1(x)$ 及 $u(x)$ 是复値函数时，上面的全部理論显然也仍然正确，但 $F(x)$ 及 $F_1(x)$ 应当满足下面条件：

$$|\Delta F|^2\leqslant\Delta g\cdot\Delta h;\quad |\Delta F_1|^2\leqslant\Delta g\cdot\Delta h_1,$$

并到处須把平方换成絕对値的平方，就是說把 $(\Delta_k F)^2$ 换成 $|\Delta_k F|^2$。

还要注意黑林格尔积分的某些簡單性質。設 $\Phi(x)$ 滿足条件(153)，并且是不減的。作函数

$$F(x)=\int_a^x u(x)d\Phi(x),\tag{179}$$

其中 $u(x)$ 是連續的，并考察和

$$\sum_k\frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}。\tag{180}$$

应用中値定理：

$$\Delta_k F=\int_{\Delta_k}u(x)d\Phi(x)=u(\xi_k)\cdot\Delta_k\Phi,$$

其中 $\xi_k\in\Delta_k$。和(180)改换成下面形式：

$$\sum_k\frac{(\Delta_k F)^2}{\Delta_k g}=\sum_k u^2(\xi_k)\frac{(\Delta_k\Phi)^2}{\Delta_k g},$$

而取極限可得

$$\int_a^b \frac{(dF)^2}{dg} = \int_a^b v^2(x) \frac{(d\Phi)^2}{dg}.$$

完全同样，如果与(179)同时还有

$$F_1(x) = \int_a^x u_1(x) d\Phi_1(x),$$

其中 $\Phi_1(x)$ 满足条件 (153)，并不减，而 $u_1(x)$ 是連續的，那末可得

$$\int_a^b \frac{dF \cdot dF_1}{dg} = \int_a^b u(x) u_1(x) \frac{d\Phi \cdot d\Phi_1}{dg}. \tag{181}$$

如果 $\Phi(x)$ 及 $\Phi_1(x)$ 满足条件 (153)，而不是單調的，那末使用 $\Phi(x)$ 及 $\Phi_1(x)$ 表成不減函数之差的典式，仍可以得出公式 (181) 来。留意 $F(x)$ 及 $F_1(x)$ 显然也満足条件(153)。

87. 集合函数的扩展 建立測度論的基本途徑是由一定义于区間上的非負加法正常函数 $G(\Delta)$ 出發，把它扩展到体 L_G 上去，而仍保持其加法性。在更一般的情形中仍可采取这样的途徑。設在某一不一定是閉的集合体 T 上定义了一个非負完全加法集合函数 $\varphi(\mathscr{E})$。

設 A 是某一集合，并可由有穷多或可数无穷多个屬于 T 的集合 $\mathscr{E}_k$ 复蓋。定义集合 A 的外測度 $\{A\}$ 等于对于 A 的一切可能由 $\mathscr{E}_k$ 組成的复蓋所作諸 $\Sigma\varphi(\mathscr{E}_k)$ 的下确界：

$$\{A\}_\varphi = \inf \sum_k \varphi(\mathscr{E}_k).$$

留意如果只取其中集合 $\mathscr{E}_k$ 互无公点的复蓋，那末不难証明仍会得出同样的下确界来。

如果 A 分割成互无公点的部分 $A_k (k=1, 2, \cdots)$，那末

$$\{A\}_\varphi \leqslant \sum_k \{A_k\}_\varphi,$$

于是外測度并沒有加法性。我們介紹依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可測的集合的概念，就是說，集合 A 叫做可測的，是指对于任意預定的正数 ε 必存在一个屬于 T 的集合 $\mathscr{E}$，使

$$\{\mathscr{E} - A\}_\varphi \leqslant \varepsilon, \quad \{A - \mathscr{E}\}_\varphi \leqslant \varepsilon.$$

对于可測集合，令 $\varphi(A) = \{A\}_\varphi$。$T$ 中一切集合 $\mathscr{E}$ 显然是可測的，而对于这种集合，$\varphi(\mathscr{E}) = \{\mathscr{E}\}_\varphi$。可以証明可測集合的族是閉体，我們用 T_0 表示它，而依上面方式扩展到 T_0 上的函数 $\varphi(\mathscr{E})$ 是在 T_0 上非負并且完全加法的。

如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 是在原来体 T 上完全加法并且囿变的，那末将它依典式表成两非負函数之差 $\varphi(\mathscr{E})=\varphi_1(\mathscr{E})-\varphi_2(\mathscr{E})$，可以用上面的方式分別扩展 $\varphi_1(\mathscr{E})$ 与 $\varphi_2(\mathscr{E})$ 到某两集合体 T_1 及 T_2 上去。既屬于 T_1 也屬于 T_2 的集合构成体 T_0，因而 $\varphi(\mathscr{E})$ 可以扩展到 T_0 上去，并仍保持其完全加法性。

設原来体包含一切区間。体 T_0 可能比 L_φ 范圍广，此处 L_φ 乃是由扩展只定义于区間上的 $\varphi(\Delta)$ 而得出的。如果 T_0 比 L_φ 寬广，那末 $\varphi(\mathscr{E})$ 在 L_φ 中的集合上的值与由扩展 $\varphi(\Delta)$ 而得的值相等。对于 T_0 中不屬于 L_φ 的集合 $\mathscr{E}$，可以証明 $\varphi(\mathscr{E})\leqslant|\mathscr{E}|_\varphi$，如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 是非負的話(B. H. 格利文科，斯提勒杰斯积分，第 175 頁)。

88. 抽象空間　直到現在，当构成集合函数及积分概念时，只限于考察点集合，即由某一 n 維歐氏空間的点組成的集合。某些个别推理曾以这情形为根据。但所建立的理論很多可以适用于具体性質完全不指明的元組成的集合上去，这些元組成所謂抽象空間。現在指出推广这理論于抽象空間的一般輪廓。注意抽象空間是由某些性質作为公理来规定的。

如此，我們将考慮由某些元組成的集合，关于这些元的本性我們毫不假設什么。如此的集合所組成的一族 S 叫做正則的，是指它滿足下列两条件：(1)如果集合 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2\in S$，那末它們的交 $\mathscr{E}_1\cdot\mathscr{E}_2\in S$；(2)如果 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2\in S$，而 $\mathscr{E}_2$ 是 $\mathscr{E}_1$ 的部分，那末 $\mathscr{E}_1$ 必可分割成有穷多个屬于 S 的集合，而 $\mathscr{E}_2$ 恰是这分割中的一个部分集合。設在 S 上定义有一加法的集合函数 $\varphi(\mathscr{E})$。分割 $\mathscr{E}$ 成部分集合 $\mathscr{E}_k(k=1, 2, \cdots, n)$，其中一切集合都屬于 S。对于一切可能的分割所作的和

$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi(\mathscr{E}_k)|$$

的上确界叫做 $\varphi(\mathscr{E})$ 在集合 $\mathscr{E}$ 上的全变分。如果这全变分是有穷的，那末我們說 $\varphi(\mathscr{E})$ 是在 $\mathscr{E}$ 上囿变的。如果 $\varphi(\mathscr{E})$ 在 S 的一切集合上是囿变的，那末其全变分 $\Phi(\mathscr{E})$ 也是 S 上的加法函数，而作加法函数

$$\varphi_1(\mathscr{E})=\frac{1}{2}[\Phi(\mathscr{E})+\varphi(\mathscr{E})],\quad \varphi_2(\mathscr{E})=\frac{1}{2}[\Phi(\mathscr{E})-\varphi(\mathscr{E})],$$

可得 $\varphi(\mathscr{E})$ 表成两个在 S 上非負加法函数之差的典式：

$$\varphi(\mathscr{E})=\varphi_1(\mathscr{E})-\varphi_2(\mathscr{E})。\tag{182}$$

集合体 T 的定义与以前所說的一样。凡体都是正則族，因为我們知道如果它包含集合 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2$，那末它也包含 $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$；而如果 $\mathscr{E}_2\subset\mathscr{E}_1$，那末 $\mathscr{E}_1$ 可以分割成两个集合：$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2+(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)$，而这两集合都屬于这体，其中一个是 $\mathscr{E}_2$。如

有一正則族 S，可以很容易地作一包含 S 的最小体 T。为了作这体，只須对于 S 添加上 S 中两两无公点的集合的一切可能和。如果在 S 上定义了一个加法函数 $\varphi(\mathscr{E})$，那末可以把它扩展到包含 S 的最小体 T 之上，而仍保持其加法性，其方法很簡单。如果 T 中的 $\mathscr{E}$ 表示成 S 中一些互无公点的集合 $\mathscr{E}_k$ 之和：

$$\mathscr{E}=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{E}_k, \tag{183}$$

那末在集合 $\mathscr{E}_k$ 上我們知道 $\varphi(\mathscr{E}_k)$，于是令

$$\varphi(\mathscr{E})=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\mathscr{E}_k)。 \tag{184}$$

不难証明 $\varphi(\mathscr{E})$ 的值与 $\mathscr{E}$ 表示成形式 (183) 的方式无关。如此得出一个体 T 上的加法函数 $\varphi(\mathscr{E})$。体上的 $\varphi(\mathscr{E})$ 的正常性定义也与以前一样，而为了一个在体上的加法函数是正常的，必須且只須它是完全加法的，就是說，不仅对于有穷多个，而是对于可数无穷个項之和也是加法的。如果在体 T 上有一非負的完全加法函数 $\varphi(\mathscr{E})$，那末可以考察它于依 $\varphi(\mathscr{E})$ 可测的集合体 T_0 之上，与在前节中完全一样。对于囿变函数 $\varphi(\mathscr{E})$，这扩展可以借函数 $\varphi_1(\mathscr{E})$ 及 $\varphi_2(\mathscr{E})$ 的扩展而得出，而后两函数是在典式(182)中的那两个。

89. 积分的定义 設在正則的集合族 S 上定义了一个加法的非負函数 $G(\mathscr{E})$ 与一个有界函数 $f(p)$，p 是集合 $\mathscr{E}$ 中的元。取 S 中某一集合 $\mathscr{E}_0$，設 δ 是 $\mathscr{E}_0$ 的一分割，分 $\mathscr{E}_0$ 成为屬于 S 的集合 $\mathscr{E}_k(k=1, 2, \cdots, n)$。設 m_k 及 M_k 各是 $f(p)$ 对于 $\mathscr{E}_k$ 的諸 p 处所取諸值的下确界与上确界。作和

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n}m_kG(\mathscr{E}_k);\quad S_\delta=\sum_{k=1}^{n}M_kG(\mathscr{E}_k)。 \tag{185}$$

用 i 表示 s_δ 值对于一切分割 δ 的上确界，I 表示 S_δ 的下确界。如果 $i=I$，那末这数叫做 $f(p)$ 依 $G(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的积分。这时或許須要标明基本的集合族 S，就是凡在其上可积分的諸集合，或在分割中所用到的諸集合所成的集合族：

$$I=(S)\int_{\mathscr{E}_0}f(p)G(d\mathscr{E})。 \tag{186}$$

如果 $G(\mathscr{E})$ 是在 S 上囿变的，那末应用典式分割

$$G(\mathscr{E})=G_1(\mathscr{E})-G_2(\mathscr{E}), \tag{187}$$

可以定义积分如下：

$$\int_{\mathscr{E}_0}f(p)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}_0}f(p)G_1(d\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}_0}f(p)G_2(d\mathscr{E}), \tag{188}$$

这时設右边的两积分都存在。

可以举出可积分性的一个充分条件。我們說函数 $f(p)$ 依正則的集合族 S 可測，是指对于任意选擇的两个实数 a 及 b，滿足不等式 $a<f(p)\leqslant b$ 的一切元 p 組成的集合屬于 S。設有界的可測函数滿足不等式 $m<f(p)\leqslant M$。分割区間$[m, M]$成部分，其分点是 y_k: $m=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=M$。設 $\mathscr{E}_k$ 是滿足不等式$y_{k-1}<f(p)\leqslant y_k$ 的諸元 p 所組成的集合。作和

$$\sum_{k=1}^{n} y_k G(\mathscr{E}_0\mathscr{E}_k)。$$

如果差 y_k-y_{k-1} 中的最大者趋向于零，那末这和有确定的極限，等于积分(186)，而这积分依所給的条件是存在的。这証明与在勒贝格-斯提勃杰斯积分情形中所用的完全相似。但当 $f(p)$ 不可測时，积分(186)也可能存在。与以前完全一样，可以証明积分的平常性質。例如：

I. 如果 $\mathscr{E}_0=\mathscr{E}_1'+\mathscr{E}_2'+\cdots+\mathscr{E}_m'$，而 $\mathscr{E}_s'$ 彼此无公元，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G(d\mathscr{E})=\sum_{s=1}^{m}\int_{\mathscr{E}_s'} f(p)G(d\mathscr{E}), \tag{189}$$

而由右边諸积分的存在可知左边积分的存在，反之也是对的。

II. 如果 $f(p)=\alpha_1 f_1(p)+\alpha_2 f_2(p)+\cdots+\alpha_m f_m(p)$，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G(d\mathscr{E})=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\int_{\mathscr{E}_0} f_s(p)G(d\mathscr{E}), \tag{190}$$

而由右边积分的存在可知左边积分也存在。

III. 如果 $G(\mathscr{E})=\alpha_1 G_1(\mathscr{E})+\alpha_2 G_2(\mathscr{E})+\cdots+\alpha_m G_m(\mathscr{E})$，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G(d\mathscr{E})=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G_s(d\mathscr{E}), \tag{191}$$

并且由右边积分的存在可知左边积分也存在，而如果 α_s 是正的，$G_s(\mathscr{E})$ 是非負的，那末逆命題也是正确的。

IV. 如果在 $\mathscr{E}_0$ 上 $|f(p)|\leqslant M$，那末

$$\left|\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G(d\mathscr{E})\right|\leqslant MV(\mathscr{E}_0), \tag{192}$$

其中 $V(\mathscr{E}_0)$ 是 $G(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的全变分，而如果 $G(\mathscr{E})$ 是非負的，則 $V(\mathscr{E}_0)=$
$=G(\mathscr{E}_0)$。

V. 如果$f_n(p)\to f(p)$ 是在 $\mathscr{E}_0$ 上一致的，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G(d\mathscr{E})=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}_0} f_n(p)G(d\mathscr{E}), \tag{193}$$

而由 $f_n(p)$ 的积分存在可知上面極限及左边积分存在。

如果$G(\mathscr{E})$是正常非负加法函数，那末积分

$$i(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} f(p)G(d\mathscr{E})$$

是一正常函数。事实上，設$\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \cdots$是$S$中集合的不漲序列，并且沒有屬于它們全体的公共点。$G(\mathscr{E})$既然是正常的，可知$G(\mathscr{E}_n)\to 0$，而$i(\mathscr{E})$的正常性可由不等式(192)得出：

$$|i(\mathscr{E}_n)|\leqslant MG(\mathscr{E}_n)。$$

如果S是集合体，那末依[39]中的諸定理，可以断定积分$i(\mathscr{E})$是完全加法的函数。还可以定义无界函数的积分，与处理勒貝格-斯提勒杰斯积分时一样。与以前一样，須要应用分$\mathscr{E}_0$成可数无穷多部分的分割。对于定义于閉的集合体上的完全加法函数$\varphi(\mathscr{E})$，可以与以前完全一样地証明一般公式(14)，分解$\varphi(\mathscr{E})$成特异部分及絕对連續部分，而其中$G(\mathscr{E})$是定义于这体上的完全加法非負函数。

90. 积分概念的推广 直到这里，取积分所依据的函数$G(\mathscr{E})$假設做加法非負的函数，或是加法的囿变函数。这一假設对于积分的定义是基本的。在本节中将要出其他积分的定义，这些定义与上述的假設并无联系。这积分定义也适用于黑林格尔积分型的积分，其积分号下乃是一个非加法的集合函数。还要注意与积分概念相联系的一种情形。如p_k是$\mathscr{E}_k$中的某元，黎曼-斯提勒杰斯和

$$\sum_{k=1}^{n} f(p_k)G(\mathscr{E}_k)$$

中的項是集合$\mathscr{E}_k$的多值函数，其多值性乃是由于可以任意地选擇p_k。因此，如把积分号下的整个式合組成一个集合函数$F(\mathscr{E})$，则自然地要考察多值的集合函数。在下面的研討中将設一切集合都屬于某一正則族S，并使用分成有穷多部分集合的分割，而集合函数假設做只取有穷多个值的。更一般的观点也是可能的。为了明确起見在研討中将作上述的限制。

提醒一下适应于所考察的情形的平常定义。集合$\mathscr{E}_0$的分割δ'叫做这集合的分割δ的后繼，是指凡δ'的部分集合必含于δ的一个部分集合中，我們写作$\delta'>\delta$。設δ_1及δ_2是$\mathscr{E}_0$的两个分割，各分割$\mathscr{E}_0$成为部分集合$\mathscr{E}_k^{(1)}$ ($k=1, 2, \cdots, n_1$)及$\mathscr{E}_k^{(2)}$ ($k=1, 2, \cdots, n_2$)。分成部分集合$\mathscr{E}_k^{(1)}\mathscr{E}_l^{(2)}$的分割叫做分割$\delta_1$及$\delta_2$的积。这积既是$\delta_1$的，也是$\delta_2$的后繼。还要注意，凡屬于族$S$并含于$S$中某一集合$\mathscr{E}_0$中的一切集合也組成一正則族。用$S\mathscr{E}_0$表示这一族。設在族$S$上定义了一个函数$F(\mathscr{E})$，一般說来这函数是多值的，非加法的，并

使 S 中的集合 $\mathscr{E}$ 各与一确定的实数集合相对应——就是与多値函数 $F(\mathscr{E})$ 的諸値相对应。設 δ 是集合 $\mathscr{E}_0$ 的某一分割，分它成部分集合 $\mathscr{E}_k(k=1, 2, \cdots, n)$，$\mathscr{E}_k$ 都屬于 S。令

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n} F(\mathscr{E}_k)。\tag{194}$$

$F(\mathscr{E})$ 旣然是多値的，对于一定的分割 δ，这和可以取不止一个値，就是說这和也是多値的。

定义　我們設 $F(\mathscr{E})$ 对于族 S 在 $\mathscr{E}_0$ 上可积分，是指存在一个具有下列性質的数 i：对于任意預定的正数 ε，必存在集合 $\mathscr{E}_0$ 的一个分割 δ_ε，使对于多値和(194)的任意値，只要 δ 是 δ_ε 的后繼，下列不等式都成立：

$$|s_\delta-i|\leqslant\varepsilon\quad(\delta>\delta_\varepsilon)。\tag{195}$$

我們看出这样的数只能有一个[84]。数 i 定义做积分的値，并且写成

$$i=(S)\int_{\mathscr{E}_0} F(d\mathscr{E})\quad 或\quad i=\int_{\mathscr{E}_0} F(d\mathscr{E})。\tag{196}$$

由上面給出的定义可得平常的积分性質：

1．如果 $F(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上可积分，那末它在屬于 S 并且含于 $\mathscr{E}_0$ 中的任意集合 $\mathscr{E}$ 上也可积分。

2．如果 $\mathscr{E}_0$ 分割成有穷多集合 $\mathscr{E}_k(k=1, 2, \cdots, m)$，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} F(d\mathscr{E})=\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathscr{E}_k} F(d\mathscr{E});\tag{197}$$

而由右边諸积分的存在可知左边的也存在，反之也正确。

3．如果 $F(\mathscr{E})=\alpha_1F_1(\mathscr{E})+\alpha_2F_2(\mathscr{E})+\cdots+\alpha_mF_m(\mathscr{E})$，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} F(d\mathscr{E})=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\int_{\mathscr{E}_0} F_s(d\mathscr{E}),\tag{198}$$

而由右边諸积分的存在可知左边积分也存在。

4．如果对于 $S\mathscr{E}_0$ 中的一切集合，$F_1(\mathscr{E})\geqslant F_2(\mathscr{E})$，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} F_1(d\mathscr{E})\geqslant\int_{\mathscr{E}_0} F_2(d\mathscr{E}),\tag{199}$$

其中两积分都假設是存在的。

5．如果 $F(\mathscr{E})$ 是單値的加法函数，那末

$$\int_{\mathscr{E}_0} F(d\mathscr{E})=F(\mathscr{E}_0)。\tag{200}$$

注意如果 $F(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的积分存在，那末集合函数

$$\Phi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}} F(d\mathscr{E})\tag{201}$$

是在族 $S\mathscr{E}_0$ 上單值的加法函数。現在比較此处的积分定义及在 [89] 中所作的定义，其中积分号下的乃是 $f(p)G(d\mathscr{E})$，而 $f(p)$ 是元的單值函数，$G(\mathscr{E})$ 是 S 上的非負加法單值的集合函数。用 $f(\mathscr{E})$ 表示当 $p\in\mathscr{E}$ 时 $f(p)$ 所取的某一值，而引进多值的非加法集合函数 $F(\mathscr{E})=f(\mathscr{E})G(\mathscr{E})$。如果 m 及 M 各表 $f(p)$ 在 $\mathscr{E}$ 上所取諸值的下确界及上确界，那末对于函数 $f(\mathscr{E})G(\mathscr{E})$ 的值，下面不等式成立：

$$mG(\mathscr{E})\leqslant f(\mathscr{E})G(\mathscr{E})\leqslant MG(\mathscr{E}),$$

而适当地选擇多值函数 $f(\mathscr{E})$ 的值可以使积 $f(\mathscr{E})G(\mathscr{E})$ 的值任意地接近 $mG(\mathscr{E})$ 及 $MG(\mathscr{E})$。設 $\mathscr{E}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathscr{E}_0$ 的某一分割。考察諸和

$$s_\delta=\sum_{k=1}^{n} m_kG(\mathscr{E}_k);\qquad S_\delta=\sum_{k=1}^{n} M_kG(\mathscr{E}_k);$$

$$\sigma_\delta=\sum_{k=1}^{n} f(\mathscr{E}_k)G(\mathscr{E}_k)。\tag{202}$$

設积分(186)存在。將証明它也是依新定义的积分。由确界的定义，可知对于預定的正数 ε，必有二分割 δ_1 及 δ_2 存在，使 $s_{\delta_1}\geqslant I-\varepsilon$，$S_{\delta_2}\leqslant I+\varepsilon$。对于分割 $\delta_0=\delta_1\delta_2$，以及对于其任意后繼 δ，必然 $s_\delta\geqslant I-\varepsilon$，$S_\delta\leqslant I+\varepsilon$。但 $s_\delta\leqslant\sigma_\delta\leqslant S_\delta$，因此只要 $\delta>\delta_0$，$|I-\sigma_\delta|\leqslant\varepsilon$ 就成立；就是說积分(186)就是依新定义的积分，并且可以写成

$$\int_{\mathscr{E}_0} f(p)G(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}_0} f(d\mathscr{E})G(d\mathscr{E})。\tag{203}$$

留意如适当地选擇 $f(\mathscr{E}_k)$ 值可以取 σ_δ 与 s_δ 及 S_δ 任意地接近，我們又可以反过来断定，如果(203)右边的积分存在，就是說如果依新定义的积分存在，那末(203)左边的积分也必存在，而且这两积分显然相等。如果加法函数 $G(\mathscr{E})$ 是囿变函数，那末应用典式分解及定义(188)，很容易証明在这情形下两积分必同时存在，而如果存在，那末二者的值必相等。特別，我們知道如果有界函数 $f(p)$ 是依族 $S\mathscr{E}_0$ 可測的，积分一定存在。注意积分依新定义存在的几个情形。所謂定义于族 S 或族 $S\mathscr{E}_0$ 上的函数 $F(\mathscr{E})$ 是从上半加法的，是指它是單值的，并且对于 $\mathscr{E}$ 分成集合 $\mathscr{E}_s'(s=1,2,\cdots,m)$ 的任意分割，下面不等式滿足：

$$F(\mathscr{E})\leqslant\sum_{s=1}^{m}F(\mathscr{E}_s')。\tag{204}$$

同样从下半加法函数由下面的不等式定义：

$$F(\mathscr{E})\geqslant\sum_{s=1}^{m}F(\mathscr{E}_s')。\tag{205}$$

对于半加法函数考察和(194)。如果 $\delta'>\delta$，那末在从上半加法的情形下，依

(204)：$s_{\delta'} \geqslant s_\delta$。設 i 是对于一切可能分割 s_δ 所取諸值的上确界。如果 i 是有穷数，那末对于某一分割 δ_ε，$0 \leqslant i - s_{\delta_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$，而对于 $\delta' > \delta_\varepsilon$ 更应有 $0 \leqslant i - s_{\delta'} \leqslant \varepsilon$，就是說在这情形下积分存在，并等于 i。如果 $i = +\infty$，那末可以認为积分值等于 $(+\infty)$，但須与(195)同时再引进下面的規定：$F(\mathscr{E})$ 的积分認为等于 $(+\infty)$，如果对于任意的正数 L，必存在一分割 δ_L，使当 $\delta > \delta_L$ 时

$$S_\delta \geqslant L。 \tag{206}$$

同样，从下半加法的函数 $F(\mathscr{E})$ 的积分值等于和(194)的下确界，而这下确界可能等于 $(-\infty)$。如此，任一半加法的函数是可积分的。現在举一半加法函数的例。設 $\varphi(\mathscr{E})$ 是一單值加法函数，就是說

$$\varphi(\mathscr{E}) = \sum_{s=1}^{m} \varphi(\mathscr{E}'_s)。$$

由此可知

$$|\varphi(\mathscr{E})| \leqslant \sum_{s=1}^{m} |\varphi(\mathscr{E}'_s)|,$$

就是說函数 $|\varphi(\mathscr{E})|$ 是从上半加法的，而积分

$$\int_{\mathscr{E}_0} |\varphi(d\mathscr{E})|$$

存在，这正是 $\varphi(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的全变分。設 $f(\mathscr{E})$ 及 $\varphi(\mathscr{E})$ 是两个單值的加法函数，而 $\varphi(\mathscr{E}) \geqslant 0$，并且当 $\varphi(\mathscr{E}) = 0$ 时 $f(\mathscr{E}) = 0$。我們知道 [81]，函数 $F(\mathscr{E}) = f^2(\mathscr{E}) : \varphi(\mathscr{E})$ 是从上半加法的，所以积分

$$\int_{\mathscr{E}_0} \frac{f^2(d\mathscr{E})}{\varphi(d\mathscr{E})}$$

存在，并且有有穷或无穷的值。我們举出一个关于积分存在的定理而不加証明：如果函数 $F_s(\mathscr{E})$ $(s = 1, 2, \cdots, m)$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上有有穷积分，而函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 对于与这些函数相应的变数值是連續的，那末 $F(\mathscr{E}) = \varphi[F_1(\mathscr{E}), F_2(\mathscr{E}), \cdots, F_m(\mathscr{E})]$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上有有穷的积分。本节中所論的积分定义是由院士 A. H. 廓勒莫郭洛夫所給的。在他的著作"关于积分概念的研究"("Untersuchungen über den Integralbegriff", Math. Ann. t. 103, 1930)中他研究了上面的积分的理論，本节及下节中的內容都是取自这篇著作的。

91. 微分同値性 現在介紹一个与上面所下的积分定义相联系的新概念。設在正則族 $S\mathscr{E}_0$ 上定义了两个函数 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$，这两函数一般說来是非單值的，非加法的。它們叫做在 $\mathscr{E}_0$ 上微分同値的，是指对于任意預定的正数 ε，必存在一个分割 δ_ε，使对于函数 $F(\mathscr{E}) = |F_1(\mathscr{E}) - F_2(\mathscr{E})|$ 所作的和

(194)滿足不等式

$$\text{对于凡 } \delta>\delta_\varepsilon,\ s_\delta<\varepsilon, \tag{207}$$

就是說，对于多值函数 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 的任意值，当 $\delta>\delta_\varepsilon$ 时

$$\sum_{k=1}^{n}|F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)|<\varepsilon。 \tag{208}$$

由积分的定义可知函数 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 微分同値是与下面的命題同效：即 $|F_1(\mathscr{E})-F_2(\mathscr{E})|$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的积分等于零：

$$\int_{\mathscr{E}_0}|F_1(d\mathscr{E})-F_2(d\mathscr{E})|=0。 \tag{209}$$

由上面定义可知，如果 $F_1(\mathscr{E})$ 与 $F_2(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上微分同値，那末它們在 $\mathscr{E}_0$ 的任意部分上也必是微分同値的。現在証明几个定理，以解釋清楚前节中所論积分定义的意义。

定理 1．为了 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上微分同値，必須且只須差 $F_1(\mathscr{E})-F_2(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 的任意部分集合 $\mathscr{E}$ 上的积分等于零：

$$\int_{\mathscr{E}}[F_1(d\mathscr{E})-F_2(d\mathscr{E})]=0。 \tag{210}$$

設 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上微分同値，所以在集合 $\mathscr{E}_0$ 的任意部分 $\mathscr{E}$ 上也必如此。这集合必滿足条件(208)，而留意和的絕对値≤絕对値之和，可得：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)]\right|<\varepsilon\ (\delta>\delta_\varepsilon)。$$

与定义(195)比較，可得(210)。条件(210)的充分性的証明比較复杂。設条件(210)滿足，須要証明(208)成立。把(210)应用到 $\mathscr{E}_0$ 上去，可知对于任意預定的正数 ε 必存在一分割 δ_ε，使当 $\delta>\delta_\varepsilon$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)]\right|<\frac{\varepsilon}{4}。 \tag{211}$$

現在証明下面不等式成立：

$$\text{当 } \delta>\delta_\varepsilon \text{ 时，}\sum_{k=1}^{n}|F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)|<\varepsilon, \tag{212}$$

而由此可知条件(210)是充分的。我們用归謬法証明(212)。設对于某一 $\delta>\delta_\varepsilon$，

$$\sum_{k=1}^{n}|F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)|>\varepsilon。 \tag{213}$$

这时，适当地选擇各集合的标号，可以从諸集合 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \cdots, \mathscr{E}_n$ 中选出集合 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \cdots, \mathscr{E}_m\ (m\leqslant n)$ 来，使

$$\left|\sum_{k=1}^{m}[F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)]\right|>\frac{\varepsilon}{2}。\tag{214}$$

留意 (211) 可知 $m<n$。现在使用条件 (210) 于其余諸集合 $\mathscr{E}_k$ 上去 ($k=$ $=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n$)。依这条件可以找出每个集合 $\mathscr{E}_k$ 的一个分割来 ($k=$ $=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n$)，分 $\mathscr{E}_k$ 成集合 $\mathscr{E}_s^{(k)}$ ($s=1,\ 2,\ \cdots,\ p_k$)，使

$$\left|\sum_{s=1}^{p_k}[F_1(\mathscr{E}_s^{(k)})-F_2(\mathscr{E}_s^{(k)})]\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4(n-m)}。\tag{215}$$

现在取集合 $\mathscr{E}_0$ 的分割 δ_0，分它成集合 $\mathscr{E}_1,\ \mathscr{E}_2,\ \cdots,\ \mathscr{E}_m$，及一切集合 $\mathscr{E}_s^{(k)}$ ($k=$ $=m+1,\ \cdots,\ n;s=1,\ \cdots,\ p_k$)。这分割乃是满足 (211) 及 (213) 的分割的后繼。对于 δ_0，条件(211)也必滿足。对于它作出现在这条件中的和，并使用不等式(214)及(215)，可得：

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{m}[F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)]+\sum_{k=m+1}^{n}\sum_{s=1}^{p_k}[F_1(\mathscr{E}_s^{(k)})-F_2(\mathscr{E}_s^{(k)})]\right|\geqslant\\&\geqslant\left|\sum_{k=1}^{m}[F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)]\right|-\left|\sum_{k=m+1}^{n}\sum_{s=1}^{p_k}[F_1(\mathscr{E}_s^{(k)})-F_2(\mathscr{E}_s^{(k)})]\right|\geqslant\\&\geqslant\left|\sum_{k=1}^{m}[F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)]\right|-\sum_{k=m+1}^{n}\left|\sum_{s=1}^{p_k}[F_1(\mathscr{E}_s^{(k)})-F_2(\mathscr{E}_s^{(k)})]\right|>\\&\qquad>\frac{\varepsilon}{2}-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\varepsilon}{4(n-m)}=\frac{\varepsilon}{4}。\end{aligned}$$

如此，对于 δ_s 的后繼分割 δ_0，条件(211)不能滿足，因而不等式 (212) 及定理得証。

定理 2. 如果函数 $F(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上可积分，那末不定积分

$$H(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}F(d\mathscr{E})\quad(\mathscr{E}\in S\mathscr{E}_0)\tag{216}$$

是在族 $S\mathscr{E}_0$ 上單值加法且与 $F(\mathscr{E})$ 微分同値的唯一函数。

事实上，$H(\mathscr{E})$ 是加法的，而依[90]的性質 5:

$$\int_{\mathscr{E}}H(d\mathscr{E})=H(\mathscr{E})\quad(\mathscr{E}\in S\mathscr{E}_0)。\tag{217}$$

与(216)比較，可得

$$\int_{\mathscr{E}}H(d\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}F(d\mathscr{E}),\tag{218}$$

就是說

$$\int_{\mathscr{E}}[H(d\mathscr{E})-F(d\mathscr{E})]=0\quad(\mathscr{E}\in S\mathscr{E}_0),\tag{218$_1$}$$

由此可知 $H(\mathscr{E})$ 与 $F(\mathscr{E})$ 微分同値。剩下的乃是証明唯一性。如果 $H(\mathscr{E})$ 是在 $S\mathscr{E}_0$ 上單値加法函数，与 $F(\mathscr{E})$ 微分同値，那末依 (200)，(217) 成立，而由

所設 $H(\mathscr{E})$ 及 $F(\mathscr{E})$ 微分同值，可知(218_1) 成立，所以 $H(\mathscr{E})$ 应由公式 (216) 定义，就是說 $H(\mathscr{E})$是唯一的。如此 $F(\mathscr{E})$可能是非單值的，非加法的，但它的不定积分是單值的，加法的，并与 $F(\mathscr{E})$ 微分同值。由条件(210)直接可得下列的附注。

注 1. 如果 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上微分同值，而其中的一个在 $\mathscr{E}_0$ 上可积分，所以依 $\mathscr{E}_0$ 的任意部分也可积分，那末另一个也是可积分的，而它們二者的积分相等。

注 2. 如果 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 是在 $\mathscr{E}_0$ 上微分同值的，那末 $|F_1(\mathscr{E})|$ 和 $|F_2(\mathscr{E})|$ 也是微分同值的。这命题直接可以由定义(208)得出，因为显然

$$\left|\,|F_1(\mathscr{E}_k)|-|F_2(\mathscr{E}_k)|\,\right|\leqslant|F_1(\mathscr{E}_k)-F_2(\mathscr{E}_k)|。$$

注 3. 設 $F(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上可积分，又設 $H(\mathscr{E})$ 由公式 (216) 定义。函数 $H(\mathscr{E})$ 和 $F(\mathscr{E})$是微分同值的，而 $|H(\mathscr{E})|$ 和 $|F(\mathscr{E})|$ 也是微分同值的。上面曾經看到，半加法函数 $|H(\mathscr{E})|$ 是可积分的。設它的积分存分。此时函数 $|F(\mathscr{E})|$ 也可积分，而

$$\int_{\mathscr{E}_0}|H(d\mathscr{E})|=\int_{\mathscr{E}_0}|F(d\mathscr{E})|。$$

上面的积分很自然地叫做 $F(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上的全变分。

注 4. 如果 $F_1(\mathscr{E})$ 及 $F_2(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}$ 上微分同值，而 $f(p)$是有界的元函数，那末积 $f(\mathscr{E})F_1(\mathscr{E})$ 及 $f(\mathscr{E})F_2(\mathscr{E})$ 微分同值。这命题由微分同值的定义可以直接得出。与以前一样 [90]，$f(\mathscr{E})$ 表示 $f(p)$ 对于任意 $p\in\mathscr{E}$ 的值。

注 5. 設 $F(\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{E}_0$ 上可积分，而不定积分

$$H(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}F(d\mathscr{E}),$$

(这乃是 $S\mathscr{E}_0$ 上的一个單值加法函数)是 $\mathscr{E}_0$ 上的囿变函数。設 $f(p)$ 是有界函数，并且依族 $S\mathscr{E}_0$ 可测。函数 $H(\mathscr{E})$ 及 $F(\mathscr{E})$ 是微分同值的，因此 $f(\mathscr{E})H(\mathscr{E})$ 及 $f(\mathscr{E})F(\mathscr{E})$ 也是微分同值的。但我們知道积分

$$\int_{\mathscr{E}_0}f(d\mathscr{E})H(d\mathscr{E})$$

存在，因此积分

$$\int_{\mathscr{E}_0}f(d\mathscr{E})F(d\mathscr{E})$$

也存在，并且与前一积分有相同的数值。在特殊情形，如果 S 是对于非負加法正常函数 $G(\mathscr{E})$ 的点集合体 I_G，而

$$F(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}\omega(P)G(d\mathscr{E});\quad F_1(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}\omega_1(P)G(d\mathscr{E}),$$

其中 $\omega(P)$ 及 $\omega_1(P)$ 属于 L_2，那末不定积分

$$\Psi(\mathscr{E})=\int_{\mathscr{E}}\frac{F(d\mathscr{E})F_1(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}=\int_{\mathscr{E}}\omega(P)\omega_1(P)G(d\mathscr{E})$$

显然是囿变函数，因此对于任意一个依 $G(\mathscr{E})$ 可测的有界函数 $f(P)$，积分

$$\int_{\mathscr{E}}f(d\mathscr{E})\frac{F(d\mathscr{E})F_1(d\mathscr{E})}{G(d\mathscr{E})}$$

存在，而关于这积分我們在以前已曾談过了 [84]。